Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 13

Año 2008

13.1. Septiembre 2008

- CUESTIÓN 1.A.

  Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz B tal que $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  selcs Sept 2008 Solución:

  Primero resolvemos la ecuación matricial:

  $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  Calculemos ahora la inversa de A:

  $|A| = -3; \quad , adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

  Luego

  $B = A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 1.B.

  Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 15000 euros y el modelo B a un precio de 20000 euros. La oferta está limitada por las existencias que son 20 coches del modelo A y 10 del modelo B, queriendo vender al menos, tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos, de 60000 euros.

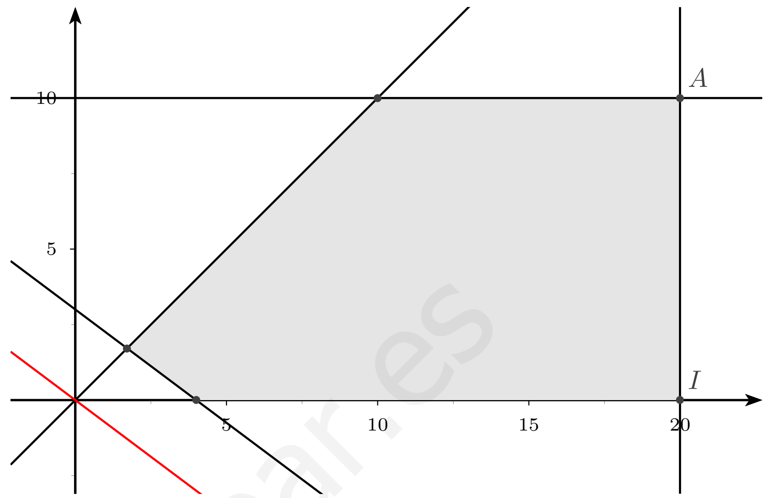
  a) Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

  b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

  selcs Sept 2008 Solución:

x = número de coches de modelo A
y = número de coches de modelo B
Ingresos: $f(x,y) = 15x + 20y$ en miles de euros

$$\begin{cases} x \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq y \\ 15x + 20y \geq 60 \end{cases}$$



Representamos (trabajaremos en miles):

$x \geq y$

x	0	10
y	0	10

$15x + 20y > 60$

x	0	4
y	3	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 15x + 20y = 0$

x	0	20
y	0	-15

Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto A, o sea vender 20 coches del A y 10 del B, entonces el importe de los ingresos sería: $f(20,10) = 500$, es decir 500.000 € .

- CUESTIÓN 2.A.

Considérense las funciones siguientes: $f(x) = x - 2; \quad g(x) = x^2$

a) Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = f(x).g(x)$.

b) Hallar dos primitivas diferentes de la función $y = f(x).g(x)$

selcs Sept 2008 Solución:

a) Llamemos $h(x)$ a la función producto: $h(x) = x^2(x-2) = x^3 - 2x^2$

Para hallar los máximos y los mínimos estudiaremos el crecimiento de la función, lo que viene dado por el signo de la derivada y para ello empezamos anulando la derivada:

$h'(x) = 3x^2 - 4x; \quad 3x^2 - 4x = 0; \quad x(x^{-}4) = 0$ que tiene como soluciones $x = 0, x = \frac{4}{3}$

x		0		$\frac{4}{3}$	
y'	+		−		+
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		MÁXIMO		MÍNIMO	

b) $\int h(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + C$ Por tanto dando dos valores a la constante de integración C obtenemos dos primitivas: $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 1$, $F_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2$

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la curva de ecuación $y = \frac{1}{2(x+1)}$ determinar:

a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas.

c) Hacer una representación gráfica aproximada de la curva.

selcs Sept 2008 Solución:

Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:

a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$

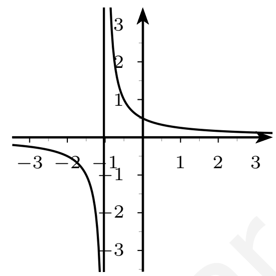
con $OX : y = 0$, resulta que no hay solución

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $2(x+1) = 0, \quad x = -1$ pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2(x+1)} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2(x+1)} = 0; \quad y = 0$



- CUESTIÓN 3.A.

Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

selcs Sept 2008 Solución:

Los números son $x, \quad 25 - x$

La función a minimizar es: $f(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 = 5x^2 - 150x + 1875$

Derivamos y anulamos la derivada: $f'(x) = 10x - 150 = 0; \quad x = 15$

Estudiamos el crecimiento:

x		15	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN 3.B.

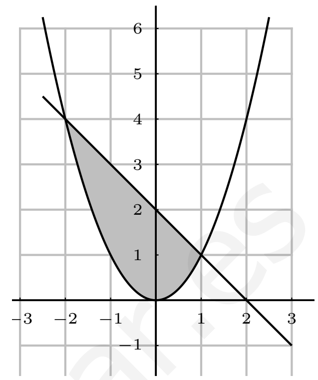
Calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = -x + 2$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sept 2008 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$
$x^2 = -x + 2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = 1, x = -2$

Área$= \displaystyle\int_{-2}^{1}$ recta $-$ parábola $=$

$dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2) \quad dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

El 70 % de los estudiantes aprueba una asignatura A y un 60 % aprueba otra asignatura B. Sabemos, además, que un 35 % del total aprueba ambas.

a) Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar apruebe la asignatura B, supuesto que ha aprobado la A.

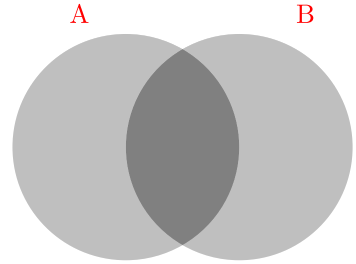
b) Calcular la probabilidad de que dicho estudiante apruebe la asignatura B, supuesto que no ha aprobado la A.

selcs Sept 2008 Solución:

Llamamos A al suceso "aprobar A"; $p(A) = 0'7$
Llamamos B al suceso "aprobar B"; $p(B) = 0'6$
Por tanto aprobar ambas: $p(A \cap B) = 0'35$

a) Aprobar B supuesto aprobado A: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'35}{0'7} = 0'5$

b) Piden calcular la probabilidad de aprobar B supuesto no aprobado A: $p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)}$, busquemos estas probabilidades:



Tenemos que $p(A^c) = 1 - p(A) = 0'3$
Además tenemos la igualdad de conjuntos: $(B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B$ siendo los sucesos incompatibles (unión disjunta), por tanto: $p(B \cap A^c) + p(B \cap A) = p(B); \quad p(B \cap A^c) + 0'35 = 0'6$, luego $p(B \cap A^c) = 0'25$.
Sustituyendo.
$p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \dfrac{0'25}{0'3} = 0'833$

- CUESTIÓN 4.B.

Una fábrica produce tornillos niquelados y dorados, siendo el 75 % de los tornillos que produce niquelados. El porcentaje de tornillos defectuosos producidos es del 4 % para los tornillos niquelados y del 5 % para los dorados. Se elige al azar un tornillo y resulta no ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niquelado?

selcs Sept 2008 Solución:

Llamamos B al suceso "no ser defectuoso".

Llamamos N al suceso "ser niquelado "; $p(N) = 0'75$; $p(B/N) = 0'96$

Llamamos D al suceso "ser dorado "; $p(D) = 0'25$; $p(B/D) = 0'95$

$\{D, N\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

$$p(N/B) = \frac{p(B/N) \cdot p(N)}{p(B/N) \cdot p(N) + p(B/D) \cdot p(D)} = \frac{0'96 \cdot 0'75}{0'96 \cdot 0'75 + 0'95 \cdot 0'25} = 0'75$$

- CUESTIÓN 5.A.

  Supongamos que un fabricante de lámparas eléctricas de duración media igual a 2000 horas, y desviación típica igual a 300 horas, trata de compararlas con otras de un nuevo método de fabricación, para ver si éstas son de mayor duración. Para ello, examina una muestra aleatoria de 100 lámparas cuya vida media es de 2380 horas. Suponiendo que el nuevo método no cambia la variabilidad en duración de lámpara a lámpara y por tanto la desviación típica en duración es la misma que en el proceso anterior, construir un intervalo de confianza para la media de la población de lámparas que se fabricarán por el nuevo método con una confianza del 95 %.

  selcs Sept 2008 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 2380, \sigma = 300, n = 100$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2380 \pm 1'96 \cdot \dfrac{300}{\sqrt{100}} = 2380 \pm 58'8 \begin{cases} 2321'2 \\ 2438'8 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $[2321'2, 2438'8]$

- CUESTIÓN 5.B.

  Se está calibrando una balanza. Para ello se pesa una "pesa de prueba" de 1000 gramos 60 veces, obteniéndose un peso medio de 1000,6 gramos. Si la desviación típica de la población es de 2 gramos ¿podemos aceptar la hipótesis nula 0 $H_0 : \mu = 1000$ frente a la alternativa $H_1 : \mu \neq 1000$ con una confianza del 99 %?

  selcs Sept 2008 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 1000$ gr frente a $H_1 : \mu \neq 1000$ gr, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 1000'6, \sigma = 2, n = 60$.

  El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 2'58 \dfrac{2}{\sqrt{60}} = 1000 \pm 0{,}6661 = \begin{cases} 1000'6661 \\ 999{,}3339 \end{cases}$

  que da el intervalo $(999{,}3339, 1000'6661)$.

  Como $\bar{x} = 1000'6$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.