Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 14

Año 2007

14.1. Septiembre 2007

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular dos números reales x e y tales que se verifique $A + xA + yI = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

  selcs Sep 2007 Solución:

  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

  $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x = -1 \\ 2x = -2 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$ sistema de soluciones $x = -1, y = 0$, como se comprueba sustituyendo en todas las ecuaciones.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  En un taller de chapa se pueden fabricar dos tipos de carrocerías A y B. Cada carrocería de tipo A necesita 4 horas de pintura y cada carrocería de tipo B necesita 6 horas de pintura, disponiéndose de un máximo de 500 horas mensuales para la pintura de las carrocerías. Si los beneficios de cada carrocería son de 2000 euros y 3500 euros para los tipos A y B respectivamente:

a) Calcular el número de carrocerías de cada tipo que deben producirse para obtener el máximo beneficio si tienen que fabricar un mínimo de 80 y un máximo de 100 carrocerías de tipo A.

b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

selcs Sept 2007 Solución:

Las variables serían:

x número de carrocerías de tipo A

y número de carrocerías de tipo B

La función a maximizar es $f(x,y) = 2000x + 3500y$

Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\begin{cases} 4x + 6y \leq 500 \\ x > 80 \\ x < 100 \end{cases}$$

Representamos:

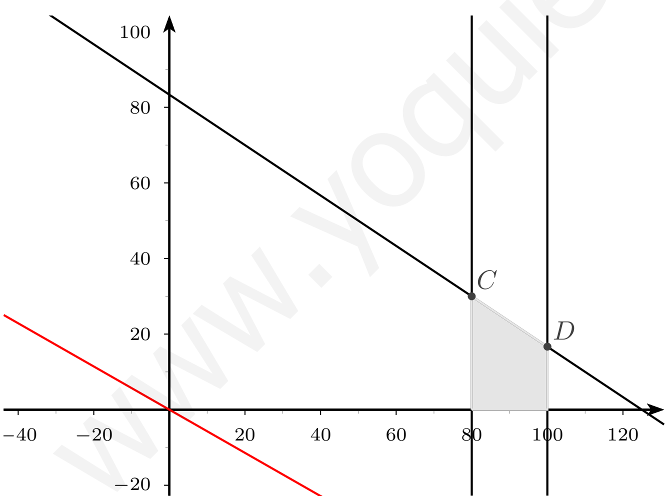
$4x + 6y \leq 500$

x	0	125
y	$80'33$	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(x,y) = 2000x + 3500y = 0$

x	0	-35
y	0	20



Como no se ve claro probamos los dos puntos $C(80,30)$ y $D(100, 16'66)$

$C: \quad f((80,30) = 2000 \cdot 80 + 3500 \cdot 30 = 265000$

$D: \quad f((100, 16'66) = 2000 \cdot 100 + 3500 \cdot 16'66 = 258100$

El máximo se produce para el punto C, hay que fabricar 80 de tipo A y 30 de tipo B, así se tendrá la máxima ganancia de 265.000 € .

- CUESTIÓN 2.A.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

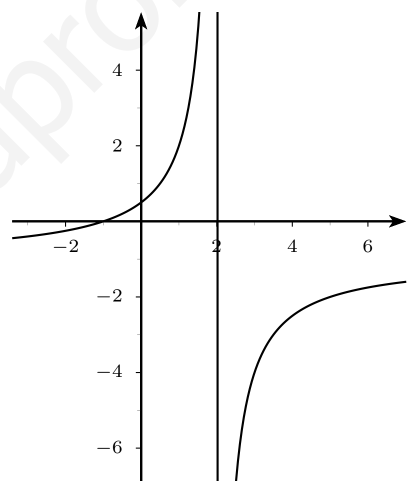
selcs Sept 2007 Solución:

a) Dominio: La función existe siempre salvo en $x = 2$ que anula al denominador.

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$

con $OX : y = 0$, resulta $x = -1$



b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $2 - x = 0$, $x = 2$ pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{2-x} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{2-x} = -1$; $y = -1$

c) Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$ que al ser siempre positiva nos dice que la función es siempre creciente.

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+3 & \text{si} \quad x > 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente.

b) Estudiar su continuidad y en caso de que exista algún tipo de discontinuidad, decir de qué tipo de discontinuidad se trata.

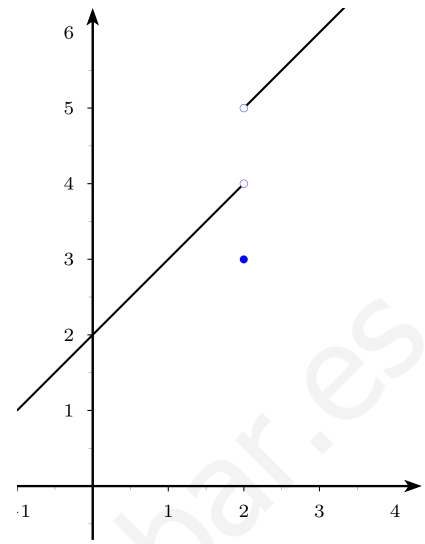
selcs Sept 2007 Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x<2 \\ x+3 & si \quad x>2 \\ 3 & si \quad x=2 \end{cases}$$

x	0	2
y	2	4

x	2	3
y	5	6



b)

Es continua siempre excepto en $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5$

$f(2)=3$

En $x=2$ hay discontinuidad de salto finito.

- CUESTIÓN 3.A.

Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

selcs Sept 2007 Solución:

número $= x$

$f(x) = x - x^2$ máximo

$f'(x) = 1 - 2x$

anulando la derivada:

$1-2x=0; \quad x = \dfrac{1}{2}$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

- CUESTIÓN 3.B.

Hallar el área limitada por las curvas $y=-x^2+x+2$ e $y=-x+2$.

selcs Sept 2007 Solución:

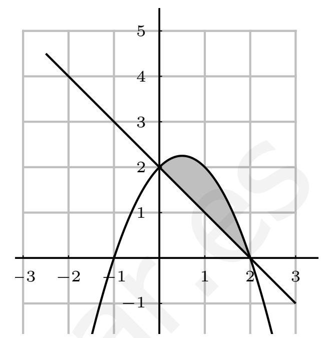
Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$-x^2 + x + 2 = -x + 2; \quad -x^2 + 2x = 0; \quad x(-x + 2) = 0; \quad x = 0, x = 2$

Área$= \int_0^2$ parábola $-$ recta $=$

$dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) \quad dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

  Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que resuelvan el problema de forma independiente es de 1/3 para Juan y de 1/4 para Pedro.

  a) ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto por alguno de los dos?

  b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea resuelto por ninguno?

  selcs Sept 2007 Solución:

  Llamamos J al suceso "Juan resuleve el problema"; $p(J) = \frac{1}{3}$

  Llamamos P al suceso "Pedro resuleve el problema"; $p(P) = \frac{1}{4}$

  Consideramos que los dos son independientes, por tanto $p(J \cap P) = p(J) \cdot p(P) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

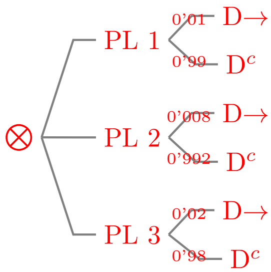
  a) Que lo resuelva alguno es la unión: $p(J \cup P) = p(J) + p(P) - p(J \cap P) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

  b) Que no lo resuelva ninguno es contrario de que lo resuelva alguno: $p(J \cup P)^c = 1 - p(J \cup P) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- CUESTIÓN 4.B.

  El volumen diario de producción en tres plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 unidades en la segunda y 2000 unidades en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1 %, 0'8 % y 2 % respectivamente. Calcular la probabilidad de que al seleccionar una unidad al azar sea defectuosa.

  selcs Sept 2007 Solución:



La probabilidad de que venga de cada planta es :

$$p(PL1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}$$
$$p(PL2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}$$
$$p(PL3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}$$

Sea D el suceso seleccionar unidad defectuosa

Sumando las ramas que terminan seleccionando defectuosa: $p(D) = \frac{1}{7}{,}0'01 + \frac{2}{7}{,}0'008 + \frac{4}{7}{,}0'02 = 1'514$

Hemos hecho el problema sirviéndonos de un árbol con las probabilidades respectivas. Vamos a hacer el problema utilizando el Teorema de la probabilidad total.

Los sucesos: $\{PL1, PL2, PL3\}$ constituyen un sistema completo de sucesos.

$$p(PL1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}; \quad p(D/PL1) = 0'01$$
$$p(PL2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}; \quad p(D/PL2) = 0'008$$
$$p(PL3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}; \quad p(D/PL3) = 0'02$$

Entonces por el Teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = p(PL1).p(D/PL1) + p(PL2).p(D/PL2) + p(PL3).p(D/PL3) = \frac{1}{7}{,}0'01 + \frac{2}{7}{,}0'008 + \frac{4}{7}{,}0'02 = 1'514$$

- CUESTIÓN 5.A.

Un directivo de cierta empresa de material eléctrico afirma que la vida media de cierto tipo de bombillas es de 1500 horas. Otro directivo de la misma empresa afirma que la vida media de dichas bombillas es igual o menor de 1500 horas. Elegida una muestra aleatoria simple de 81 bombillas de dicho tipo, vemos que su vida media ha sido de 1450 horas. Suponiendo que la vida de las bombillas sigue una distribución normal con desviación típica igual a 180 horas:

a) ¿Es compatible la hipótesis $H_0 : \mu = 1500$, frente a la hipótesis $H_1 : \mu \neq 1500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1450$

b) ¿Es compatible la hipótesis $H_0 : \mu = 1500$, frente a la hipótesis $H_1 : \mu < 1500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1450$.

selcs Sept 2007 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 1450, \sigma = 180, n = 81$.

a) Contrastamos $H_0 : \mu = 1500$ años frente a $H_1 : \mu \neq 1500$ años, test bilateral.

El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 \pm 2'58 \frac{180}{\sqrt{81}} = 1500 \pm 51'6$ que da el intervalo $(1448'4, 1551'6)$.

Como $\bar{x} = 1450$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1500$ años.

b) Contrastamos $H_0 : \mu = 1500$ años frente a $H_1 : \mu < 1500$ años, unilateral.

El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El intervalo de aceptación tiene de extremo inferior $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 - 2'33 \dfrac{180}{\sqrt{81}} = 1500 - 46'6 = 1453'4$.

Como $\bar{x} = 1450$ es menor queda fuera de la zona de aceptación, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1500$ años.

- CUESTIÓN 5.B.

  Supongamos una población $N(\mu, \sigma = 8)$. Se extrae de ella una muestra aleatoria simple. Si se sabe que la probabilidad de cometer un error de 3.92 o más al estimar la media μ mediante la media muestral es de 0.05, ¿qué tamaño ha de tener la muestra?

  selcs Sept 2007 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 8$, error $= 3'92$, nivel de significación $= 0'05$.

  Para el nivel de significación $= 0'05$ corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el error viene dado por:

  error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{n}} \leq 3'92$

  $1'96 \cdot \dfrac{8}{3'92} \leq \sqrt{n}; \quad n \geq 16$