Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia)
15

Año 2006

15.1. Septiembre 2006

- CUESTIÓN 1.A.

  Estudiar para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema:

  $$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

  y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

  selcs Sep 2006 Solución: Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^a + 1^a.(-2) \\ 3^a - 1^a \end{array} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

  Podemos detener aquí Gauss pues la y ha quedado aislada: Pasamos a sistema:

  $$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ -y+(a-2)z=2-a \\ (a-1)y=2-a \end{cases} \quad \text{queda } y=\frac{2-a}{a-1} \text{ para } a\neq 1$$

  Sustituyendo en la 2^a ecuación para despejar z:

  $$-\frac{2-a}{a-1}+(a-2)z=2-a; \quad (a-2)z=2-a+\frac{2-a}{a-1}; \quad z=\frac{2-a+\frac{2-a}{a-1}}{a-2} \text{ para } a\neq 2$$

  Tenemos entonces:

  - Si $a\neq 1$ y $a\neq 2$, el sistema es compatible determinado.
  - Si $a=1$ queda el sistema:

    $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-z=1 \\ 0y=1 \end{cases}$$

    Cuya tercera ecuación nos dice que es incompatible.

- Si $a = 2$ queda el sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -y=0 \\ y=0 \end{array}\right. \quad \text{equivalente a: } \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array}\right. \quad \text{el sistema es compatible indeterminado.}$$

Lo resolvemos pasando una incógnita al 2^0 miembro para que quede como parámetro, por ejemplo la z: $\left\{\begin{array}{r} y=0 \\ x=1-z \end{array}\right. \quad z \in R$

- CUESTIÓN 1.B.

Para la elaboración de dos tipos de refrescos R1 y R2 se utilizan (además de agua) dos tipos de productos A y B. Cada refresco del tipo R1 contiene 3 gramos del producto A y 3 gramos del producto B y cada refresco del tipo R2 contiene 3 gramos del producto A y 6 gramos del producto B. Se dispone en total de 120 gramos de producto A y 180 gramos de producto B. ¿Cuántos refrescos de cada clase se han de elaborar para obtener un beneficio máximo sabiendo que con los refrescos R1 la ganancia es de 3 euros y con los refrescos R2 la ganancia es de 4 euros?

selcs Sep 2006 Solución:

Disponemos los datos en una tabla:

	R1	R2	
A	3	3	≤ 120
B	3	6	≤ 180

Las variables serían:

x número de refrescos de tipo A

y número de refrescos de tipo B

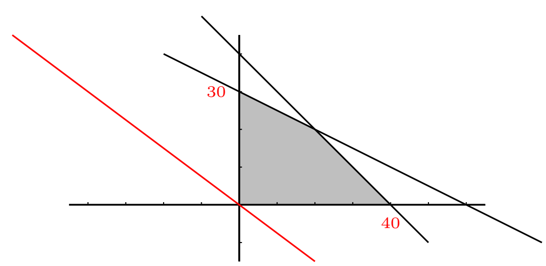
La función a maximizar es $f(x, y) = 3x + 4y$

Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+3y \leq 120 \\ 3x+6y \leq 180 \end{array}\right.$$

Representamos:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x+3y \leq 120 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 40 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array} \\ 3x+6y \leq 180 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 60 \\ \hline y & 30 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$



Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 3x + 4y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -40 \\ \hline y & 0 & 30 \end{array}$$

El máximo se produce para: $f(20, 20) = 3{,}20 + 4{,}20 = 140$

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

Descomponer el número 45 en dos sumandos tales que la suma del doble del cuadrado del primero más siete veces el cuadrado del segundo, sea mínima.

selcs Sep 2006 Solución:

primer sumando: x

segundo sumando: $45 - x$

Escribimos la función cuyo mínimo buscamos:

$f(x) = 2x^2 + 7(45 - x)^2 = 9x^2 - 630x + 14175$

Derivando: $f'(x) = 18x - 630$. Anulamos la derivada: $18x - 630 = 0$, resulta: $x = 35$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es mínimo:

x		35	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

- CUESTIÓN 2.B. [1.5 PUNTOS]

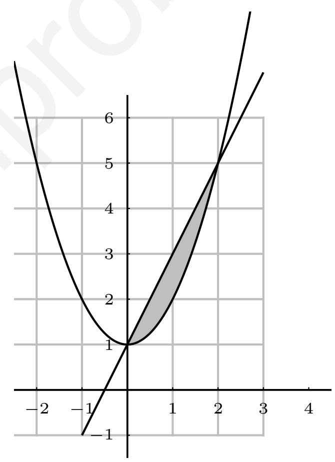
Calcular el área limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.

selcs Sep 2006 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:
$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = 2x + 1 \end{cases}$ $\quad x^2 + 1 = 2x + 1; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x(x-2) = 0; \quad x = 0, x = 2$

Área$= \displaystyle\int_0^2$ recta $-$ parábola $=$

$dx = \int_0^2 (2x - x^2) \quad dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$



- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$, se pide:

(a) Calcular su dominio

(b) Determinar las asíntotas y los cortes con los ejes

(c) Determinar máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento

(d) Hacer su representación gráfica aproximada

selcs Sep 2006 Solución:

Como es una función polinómica basta para representarla estudiar los puntos de corte y el crecimiento. Después contestaremos a los restantes apartados.

Puntos de corte

Puntos de corte con OX,

$y = 0: \quad \dfrac{6x^2 - x^4}{8} = 0, \quad 6x^2 - x^4 = 0, \quad x^2(6 - x^2) = 0, \quad x = 0$ doble, $x = \pm\sqrt{6}$

Puntos de corte con OY, $x = 0: \quad y = \frac{0}{8} = 0$, ya considerado.

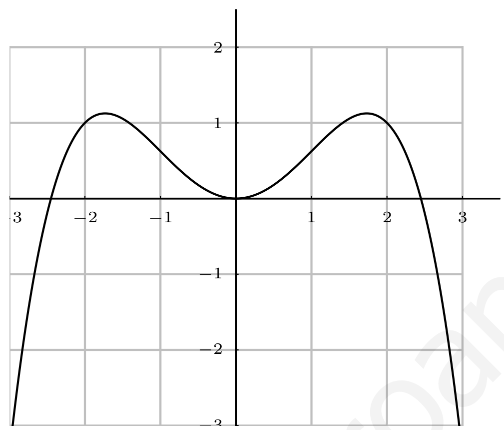
Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{12x - 4x^3}{8} = \frac{3x - x^3)}{2} = \frac{x(3 - x^2)}{2}$$

los factores se anulan para $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Encajando la forma dada por el crecimiento con los puntos de corte podemos representar:



Ahora responderemos a los puntos del enunciado:

a) Dominio:

El dominio es todo R pues es una función polinómica.

b) Asíntotas y cortes con los ejes:

Asíntotas: no tiene por ser una función polinómica.

Por ejemplo para la horizontal $y = n$:

$$n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 - x^4}{8} = \infty$$

Cortes con los ejes ya hallados.

c) Crecimiento y máximos y mínimos

Como se ve en el estudio del crecimiento, como la función es continua y derivable siempre por ser polinómica, hay MÁXIMOS en $x = \pm\sqrt{3}$ y MÍNIMO en $x = 0$

- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

Determinar a y b para que la función $f(x) = x^2 + 2ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(-1, 2)$.

selcs Sep 2006 Solución:

Que tenga un mínimo en $(-1, 2)$, supone dos cosas: a) que pasa por ese punto: $f(-1) = 2$, b) que su derivada se anula en $x = -1$

$$f(-1) = 2: \qquad (-1)^2 + 2a(-1) + b = 2, \qquad 1 - 2a + b = 2, \qquad -2a + b = 1$$

$f'(-1) = 0: \qquad f'(x) = 2x + 2a, \qquad 2(-1) + 2a = 0, \qquad -2 + 2a = 0$, luego $a = 1$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $-2 \cdot 1 + b = 1, \qquad b = 3$

Resulta: $f(x) = x^2 + 2x + 3$

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

  En una ciudad se publican dos periódicos, el periódico A y el periódico B. La probabilidad de que una persona lea el periódico A es 0.1, la probabilidad de que una persona lea el periódico B es 0.1 y la probabilidad de que lea ambos es 0.02.

  (a) Calcular la probabilidad de que una persona no lea ningún periódico

  (b) Calcular la probabilidad de que una persona lea sólo un periódico

  selcs Sep 2006 Solución:

  Sabemos: $p(A) = 0'1, p(B) = 0'1, p(A \cap B) = 0'02$

  Hallemos primero la probabilidad de la unión que usaremos en los dos apartados:

  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'1 + 0'1 - 0'02 = 0'18$

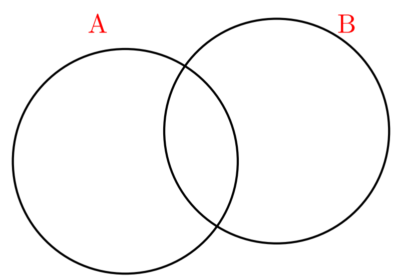
  a) "ningún periódico" es el complementario de "algún periódico", o sea de la unión:

  $p(\text{no lea ninguno}) = p(\text{ lea alguno})^c = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'18 = 0'82$

  b)"solo uno" es decir "alguno pero no los dos":

  $A \cup B = (\text{solo lea uno}) \underbrace{\cup}_{disjunta} (A \cap B)$, por tanto

  $p(a \cup B) = p(\text{solo lea uno}) + p(A \cap B); \quad 0'18 = p(\text{solo lea uno}) + 0'02$, despejando $p(\text{solo lea uno}) = 0'18 - 0'02 = 0'16$



- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

  Tres máquinas A_1, A_2 y A_3 producen, respectivamente el 50 %, 30 % y 20 % de los artículos de una fábrica. A_1 produce el 3 % de artículos defectuosos, A_2 el 4 % y A_3 el 5 %. Elegido un artículo al azar resulta defectuoso, ¿qué probabilidad hay de que proceda de cada máquina?

  selcs Sep 2006 Solución:

  A_1 produce el 50 % y son defectuosos el 3 %
  A_2 produce el 30 % y son defectuosos el 4 %
  A_1 produce el 20 % y son defectuosos el 5 %

  $\{A_1, A_2, A_3\}$ forman sistema completo de sucesos; por el teorema de Bayes:

  $$p(A_1/D) = \frac{p(D/A_1) \cdot p(A_1)}{\sum_1^3 p(A_i).p(B/A_i)} = \frac{0'03 \cdot 0'5}{0'03 \cdot 0'5 + 0'04 \cdot 0'3 + 0'05 \cdot 0'2} = 0'4$$

  De la misma forma:

  $p(A_2/D) = 0'32; \qquad p(A_3/D) = 0'27$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  Tras múltiples observaciones se ha comprobado que el número de pulsaciones de los varones de 20 a 25 años se distribuye normalmente con una media de 72 pulsaciones y una desviación típica igual a 4. Si una muestra de 100 deportistas varones de esa edad da una media de 64 pulsaciones.

  (a) ¿Queda el valor de 72 pulsaciones dentro del intervalo de confianza para la media muestral al 95 % de confianza?

  (b) ¿Debemos aceptar la hipótesis de que hay diferencia significativa entre el número de pulsaciones de los deportistas y el número de pulsaciones de los varones en general, con un nivel de significación de 0.05?

  selcs Sep 2006 Solución:

  (a) Los datos son: $\bar{x} = 64, \sigma = 4, n = 100$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 64 \pm 1'96 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 64 \pm 0'784$

  Luego el valor de 72 pulsaciones queda fuera del intervalo de confianza

  (b) Contrastamos $H_0 : \mu = 72$ pulsaciones frente a $H_1 : \mu \neq 72$ pulsaciones, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\sigma = 4; \quad n = 100$

  nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 72 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 72 \pm 0'784$ que da el intervalo $(71'216, 72'784)$.

  Como $\bar{x} = 64$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 72$ pulsaciones, concluimos que sí hay diferencia significativa para la muestra recogida entre los deportistas

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de esas bombillas es 100 horas. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95 % de que el error de la duración media que se calcula sea menor que 10 horas.

  selcs Sep 2006 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 100$ h;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 10 h

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{100}{\sqrt{n}} \leq 10; \qquad 1'96 \cdot \dfrac{100}{10} \leq \sqrt{n}; \qquad (1'96)^2 \leq n; \qquad 384'16 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 385 para que el nivel de confianza sea del 95 %