Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 17

Año 2004

17.1. Septiembre 2004

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  En una compañía envasan los bombones en cajas de 250 gr, 500 gr y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr) que de tamaño mediano (500 gr). Sabiendo que el precio del kilo de bombones es de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 euros, ¿cuántas cajas se han envasado de cada tipo?

  selcs Sep 2004 Solución:

  x: número de cajas de 250 gr

  y: número de cajas de 500 gr

  z: número de cajas de 1 kg

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x=y+5 \\ \frac{40}{4}x+\frac{40}{2}y+40z=1250 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x-y=5 \\ 10x+20y+40z=1250 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x-y=5 \\ x+2y+4z=125 \end{array}\right.$$

  $$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 125 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -1 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 65 \end{array}\right) 3^a\cdot 2+2^a \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -1 & -55 \\ 0 & 0 & 5 & 75 \end{array}\right)$$

  queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 2y+z=55 \\ 5z=75 \end{array}\right.$ sustituyendo hacia arriba resulta: $z=15, y=20, x=25$

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 céntimos por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 céntimos por impreso. El estudiante lleva dos bolsas, una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. ¿Cuántos impresos tendrá que repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

selcs Sep 2004 Solución:

Sean:

$x =$ número de impresos de empresa A

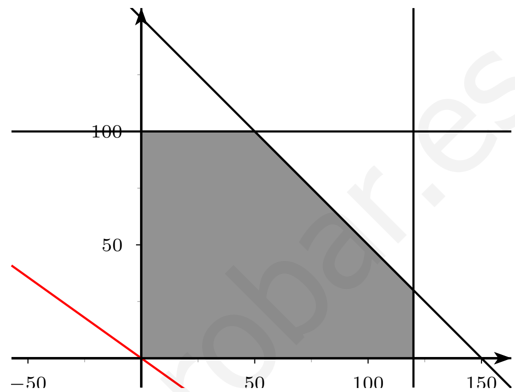
$y =$ número de impresos de empresa B

Ganancia: $f(x, y) = 5x + 7y$ céntimos

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 120 \\ y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \end{array}\right\}$$

Representamos: $x + y \leq 150$

x	0	150
y	150	0



Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 5x + 7y = 0$

x	0	-70
y	0	50

Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto $(50, 100)$, hallamos sus coordenadas:

$P(50, 100)$; $\quad f(50, 100) = 5 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 950 = 9'5$ €

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

Hallar los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ tenga un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en el punto $x = 2$.

selcs Sep 2004 Solución:

En ambos puntos la derivada ha de ser nula:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(1) = 0 & 3a + 2b + 1 = 0 \\ f'(2) = 0 & 3a4 + 2b2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 3a + 2b = -1 \\ 12a + 4b = -1 \end{array}\right.$$

sistema que tiene como soluciones $a = \dfrac{1}{6}$; $\quad b = -\dfrac{3}{4}$

El polinomio es $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + x + 1$

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

Hallar el área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

selcs Sep 2004 Solución:

Hallamos los puntos de corte entre las dos parábolas:

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{array}\right. \qquad x^2 = -2^2 + 3; \quad 3x^2 = 3; \quad x = \pm 1$$

Por tanto él área viene dada por el valor absoluto de la integral de la resta de la funciones:

$$\int_{-1}^{1} x^2 - (-2x^2+3)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2-3)dx$$

Como la figura es simétrica respecto el eje de ordenadas basta hacer la integral de la mitad positiva:

$$\int_{0}^{1} (-3x^2-3)dx = \left[-x^3-3x\right]_0^1 = -1-3-0 = -2$$

Por tanto el área comprendida entre las dos parábolas es $S = 4$

- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

  Dada la curva $y = \dfrac{1}{x-1}$ se pide:

  (a) Dominio y asíntotas.

  (b) Simetrías y cortes con los ejes.

  (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  (d) Máximos y mínimos, si los hay.

  (e) Una representación aproximada de la curva.

  selcs Sep 2004 Solución:

  (a) El denominador se anula para $x = 1$, luego el dominio es $R - \{1\}$

  Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en el punto en que se anule el denominador: $x = 1$

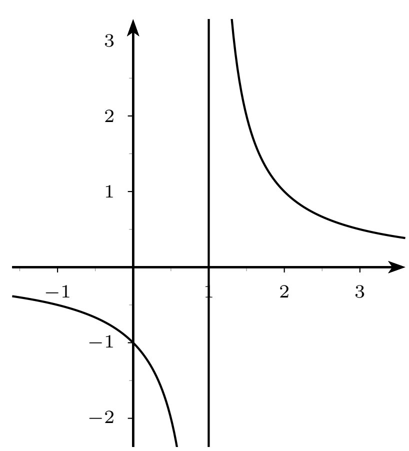
  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

  $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

  Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0; \quad y = 0$

  (b) Simetrías cortes con los ejes.

  Para ver simetrías hacemos $f(-x) = \dfrac{1}{-x-1} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$
  por tanto no hay simetrías respecto a los ejes.
  Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
  con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$
  con $OX : y = 0$, resulta $\frac{1}{x-1} = 0, sinsolucin$
  (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$
  que, como es siempre negativa, nos dice que la función es siempre decreciente.
  (d) Como conclusión de lo anterior no hay máximos ni mínimos relativos. (tampoco absolutos)
  (e) Una representación aproximada de la curva.



- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

A 100 euros el kilo, si $0 \leq x < 5$

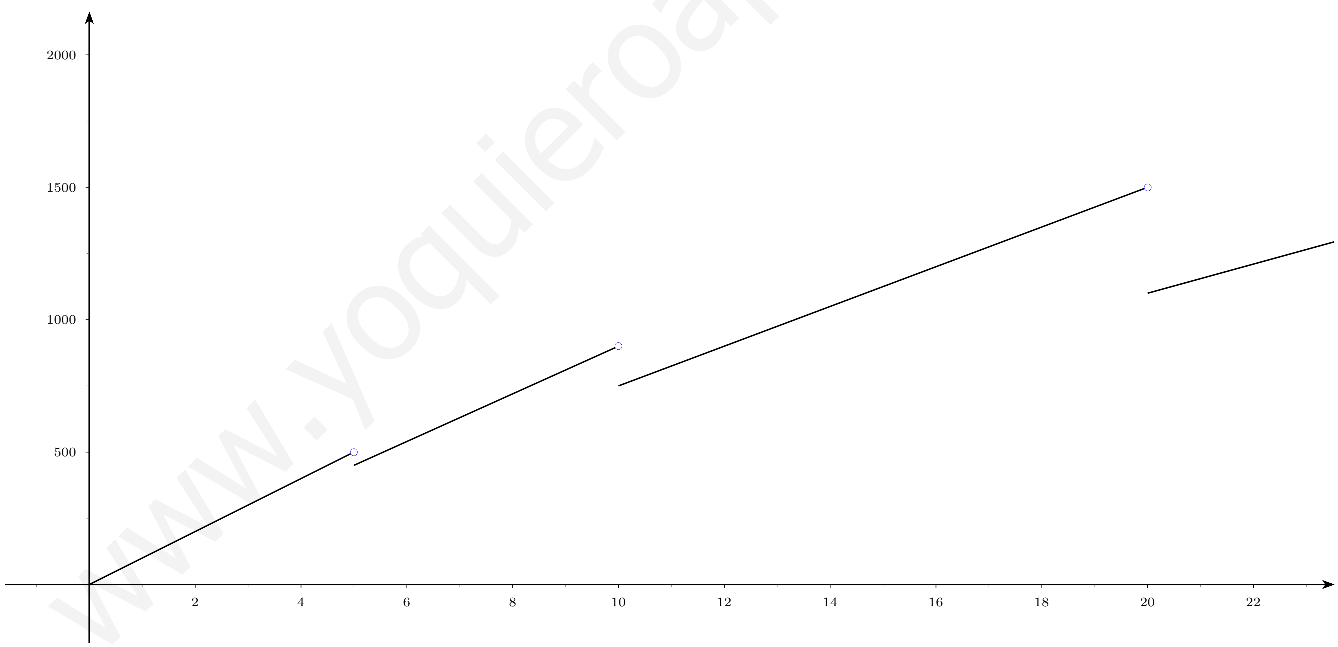
A 90 euros el kilo, si $5 \leq x < 10$

A 75 euros el kilo, si $10 \leq x < 20$

A 55 euros el kilo, si $20 \leq x$,

donde x representa el peso en kilos. Escribir la función que representa la ganancia obtenida por el vendedor, representarla gráficamente y estudiar su continuidad

selcs Sep 2004 Solución: $f(x) = \begin{cases} 100x & si \quad 0 \leq x < 5 \\ 90x & si \quad 5 \leq x < 10 \\ 75x & si \quad 10 \leq x < 20 \\ 55x & si \quad 20 \leq x \end{cases}$

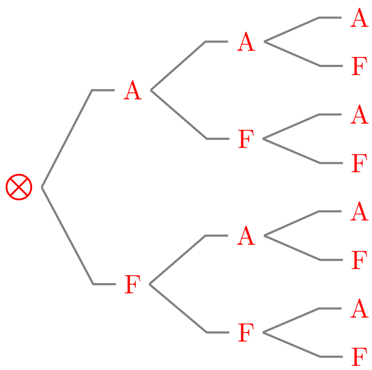


Observamos que la función no es continua en $x = 5, \quad x = 10, \quad x = 20$, donde hay saltos finitos.

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco, sabiendo que sólo pueden lanzarse tres torpedos y que la probabilidad de hacer blanco con un torpedo es 0.20?

selcs Sep 2004 Solución: A representa acertar, F fallar, la tercera extracción no tiene alternativas:



La probabilidad de la última trayectoria, que fallen las tres, es: $0'80 \cdot 0'80 \cdot 0'80 = 0'512$

Por tanto la probabilidad de acertar al menos una vez es $p = 1 - 0'512 = 0'488$

- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

Una determinada pieza puede ser fabricada por dos máquinas M_1 y M_2 que funcionan independientemente. La máquina M_1 fabrica el 70 % de las piezas y la máquina M_2 el 30 %. El 15 % de las piezas fabricadas por M_1 y el 2 % de las fabricadas por M_2 salen defectuosas. Calcular la probabilidad de que una pieza sea defectuosa.

selcs Sep 2004 Solución:

D representa pieza defectuosa. Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$p(D) = p(M_1) \cdot p(D/M_1) + p(M_2) \cdot p(D/M_2) = 0'70 \cdot 0'15 + 030 \cdot 0'02 = 0'111$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

En una determinada población juvenil el peso, en kilos, sigue una distribución normal con una desviación típica 10 kg. Se extrae una muestra aleatoria de 25 jóvenes cuya media muestral es de 48 kg. Para un nivel de significación del 5 %, ¿podemos aceptar la hipótesis de que la media poblacional es de 50 kg?

selcs Sep 2004 Solución: Contrastamos $H_0 : \mu = 50$ frente a $H_1 : \mu \neq 50$,

La desviación típica es $\sigma = 10$

El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 \pm 1'96 \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 50 \pm 3'92 = \begin{cases} 46'08 \\ 53'92 \end{cases}$

que da el intervalo $(46'08, 53'92)$.

Como $\bar{x} = 48$ € queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 50$ años.

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de automóviles; para tal fin, en varios días de la semana toma los recorridos de 100 vehículos de su flota y obtiene que la media muestral es de 165 km/día y la desviación típica muestral 6 km/día. Bajo la hipótesis de normalidad de la característica en estudio (número de kilómetros por día), construir un intervalo de confianza para la media de dicha distribución con un nivel de confianza del 95 %.

selcs Sep 2004 Solución: Los datos son: $\bar{x} = 165, \sigma = 6, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 165 \pm 1'96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{10}} = 165 \pm 1'176 \begin{cases} 166'176 \\ 163'824 \end{cases}$

El intervalo de confianza para el número medio de kilómetros diarios es $(163'824, 166'176)$