SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a = 3.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2-2-a=a^2-a$.

Si igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Existen tres casos diferentes a estudiar.

CASO 1. $a \neq 0 \ y \ a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Es compatible determinado.

CASO 2. $a=0$

En este caso el sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ 2y=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ x+1+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$$

Este sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible.

CASO 3. $a=1$

En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{Eliminamos la ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \boxed{z=2-2y} \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+2-2y=1 \Rightarrow \boxed{x=y-1}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Es compatible indeterminado.

Lo resolvemos para a = 3.

Estamos en el caso 1 y tiene una única solución. El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z & =1 \\ -x & -3y & -z & =-1 \\ \hline & -2y & & =0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ -2y \quad =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ \boxed{y=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+0+z=1 \\ 0+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=1 \\ \boxed{z=\frac{2}{3}} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x+\frac{2}{3}=1 \Rightarrow \boxed{x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

La solución es $\boxed{x=\frac{1}{3}; \quad y=0; \ z=\frac{2}{3}}$

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresa diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empres planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Es un problema de programación lineal.
Llamamos "x" al número de semanas que trabaja la primera empresa e "y" al número de semanas que trabaja la segunda empresa.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Pinos	Eucaliptos	Chopos	Coste semanal
Nº semanas primera empresa (x)	30x	20x	20x	33000x
Nº semanas segunda empresa (y)	20y	30y	20y	35000y
TOTALES	$30x+20y$	$20x+30y$	$20x+20y$	$33000x+35000y$

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste $C(x,y)=33000x+35000y$.
Las restricciones son:
"*Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos*" → $30x+20y\geq 60$
"*Se necesita plantar un mínimo de 120 eucaliptos*" → $20x+30y\geq 120$
"*Se necesita plantar un mínimo de 100 chopos*" → $20x+20y\geq 100$
Las cantidades son positivas → $x\geq 0;\quad y\geq 0$
Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 30x+20y\geq 60 \\ 20x+30y\geq 120 \\ 20x+20y\geq 100 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 6 \\ 2x+3y\geq 12 \\ x+y\geq 5 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas a cada una de las restricciones.

$3x+2y=6$

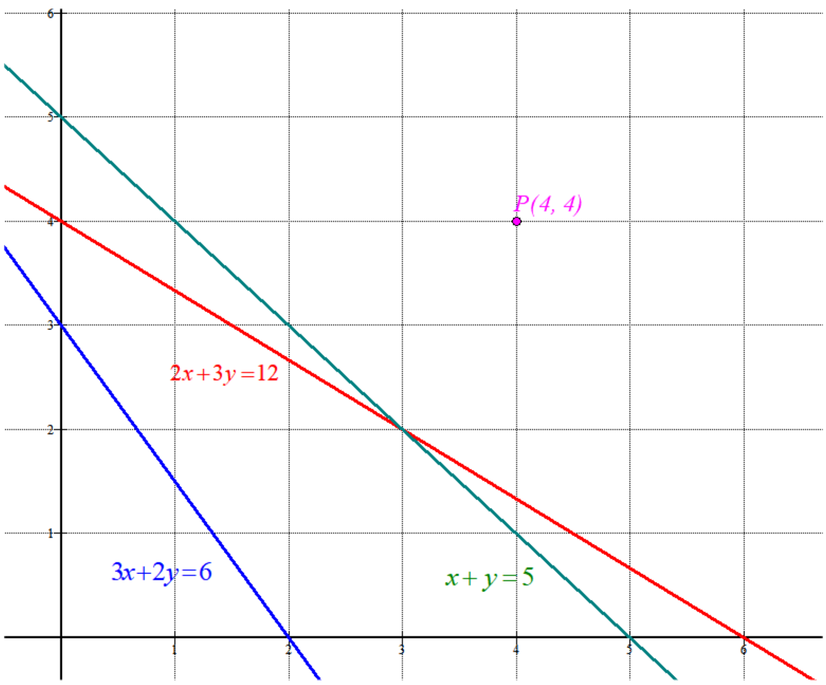
x	$y=\frac{6-3x}{2}$
0	3
2	0

$2x+3y=12$

x	$y=\frac{12-2x}{3}$
0	4
6	0

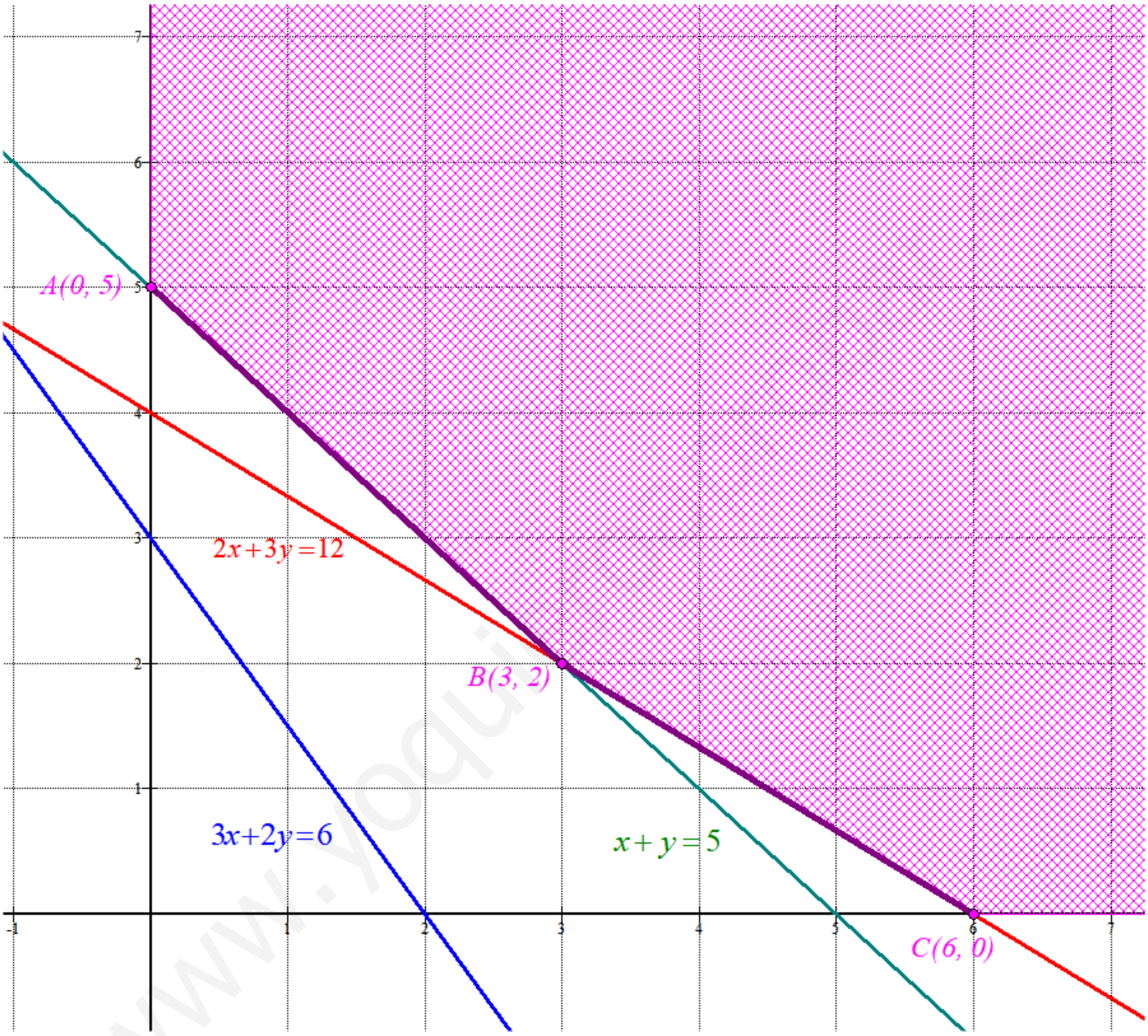
$x+y=5$

x	$y=5-x$
0	5
5	0



Comprobamos si el punto P(4, 4) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12+8\geq 6 \\ 8+12\geq 12 \\ 4+4\geq 5 \\ 4\geq 0 \\ 4\geq 0 \end{array}\right\}$$ Cumple todas las restricciones, la región factible es la zona rayada.



Valoramos la función objetivo $C(x,y)=33000x+35000y$ en cada uno de los vértices en busca de un valor mínimo.

A(0, 5) → $C(0,5)=0+175000=175000$

B(3, 2) → $C(3,2)=99000+70000=169000$ €

C(6, 0) → $C(6,0)=198000+0=198000$

El mínimo gasto cumpliendo las restricciones pedidas se consigue en el vértice B(3, 2).

Con 3 semanas de la primera empresa y 2 semanas de la segunda empresa se consiguen plantar los árboles pedidos con un coste mínimo de 169000 €.

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Hallamos la derivada de la función.

$$B(x) = -2x^2 + 24x - 36 \Rightarrow B'(x) = -4x + 24$$

Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos de la función.

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 24 = 0 \Rightarrow -4x = -24 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos x = 6.

$$B'(x) = -4x + 24 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(6) = -4 < 0$$

Como la derivada segunda es negativa en x = 6 la función tiene un máximo.

Para x = 6 la función beneficio vale $B(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 36 = -72 + 144 - 36 = 36$

El beneficio es máximo al vender 6 ordenadores semanalmente y dicho beneficio máximo es de 36.

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$:

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en x =1 y la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = 0 tenga de pendiente m = –1. (1 punto)

b) Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. (1 punto)

a) Si la función tiene un extremo relativo en x = 1 la derivada se anula en x = 1.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{3 + 2a + b = 0}$$

Si la recta tangente en x = 0 tiene pendiente m = –1 quiere decir que la derivada de la función en x = 0 vale –1 → *f ´(0) = –1*.

$$f'(0) = -1 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Y sustituyendo en la primera igualdad obtenida.

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 2a + b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Los valores buscados son $\boxed{a = b = -1}$

b) Si $a = -2$ y $b = -4$ la función queda $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$.

Calculamos su derivada e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \dfrac{4+8}{6} = 2 \\ \dfrac{4-8}{6} = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

Estos dos valores dividen la recta real en tres partes, veamos si la función crece o decrece en cada una de ellas.

- En $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right)$ tomamos x = –1 y la derivada vale $f\,'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) - 4 = 3 + 4 - 4 = 3 > 0$. La función crece en $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right)$.
- En $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$ tomamos x = 0 y la derivada vale $f\,'(0) = -4 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos x = 3 y la derivada vale $f\,'(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 4 = 27 - 12 - 4 = 11 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

Se observa que la función presenta un máximo relativo en $x = \frac{-2}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

La función crece en $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$.

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=-2x^2+5x+6$. Calcular su área.

Veamos donde se cortan las dos parábolas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+6=-2x^2+5x+6\Rightarrow 3x^2-9x=0$$

$$3x(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}$$

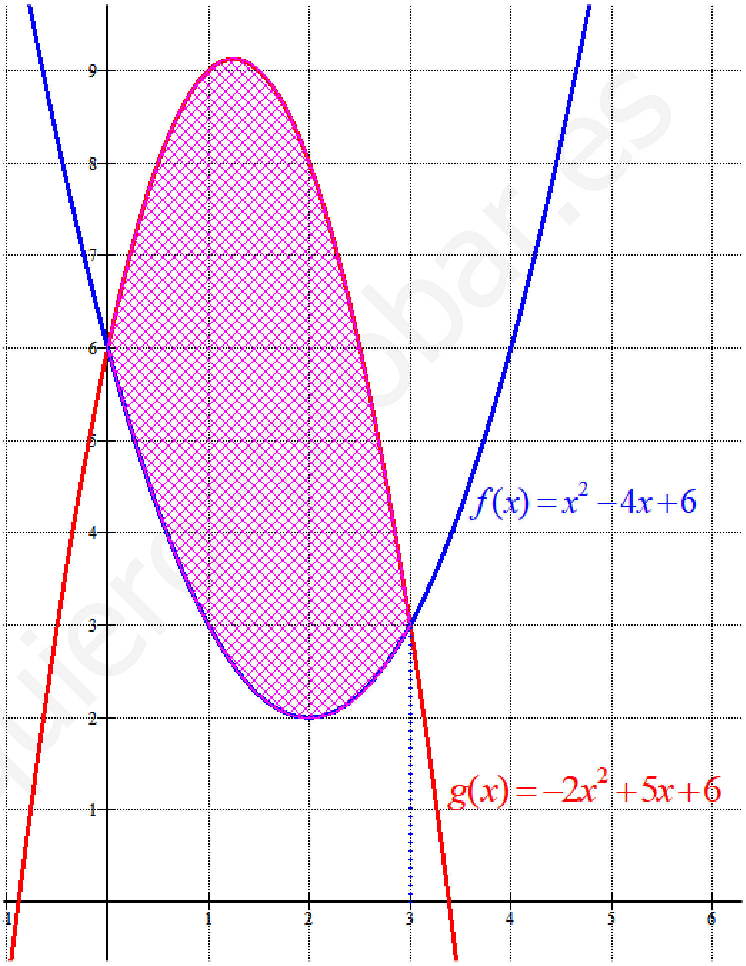
Hacemos una tabla de valores de ambas funciones en el intervalo [0, 3].

$f(x)=x^2-4x+6$

x	$y=x^2-4x+6$
0	6
1	$1-4+6=3$
2	$4-8+6=2$
3	$9-12+6=3$

$g(x)=-2x^2+5x+6$

x	$y=-2x^2+5x+6$
0	6
1	$-2+5+6=9$
2	$-4+10+6=12$
3	$-18+15+6=3$



Por el dibujo y contando los cuadraditos debemos obtener un valor del área entre 13 y 14 u^2.
Calculamos el área como la integral definida entre 0 y 3 de *g(x) – f(x)*.

$$Área=\int_0^3 -2x^2+5x+6-\left(x^2-4x+6\right)dx=\int_0^3 -2x^2+5x+6-x^2+4x-6dx=$$

$$=\int_0^3 -3x^2+9xdx=\left[-x^3+9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\left[-3^3+9\frac{3^2}{2}\right]-\left[-0^3+9\frac{0^2}{2}\right]=$$

$$=-27+\frac{81}{2}=\boxed{13{,}5\,u^2}$$

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto x = 1 (1 punto)

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función f(x) el eje OX y las rectas de ecuación x = 0 y x = 1. (1 punto)

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto x = a tiene la expresión:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Para la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$ en x = 1 la tangente debe tener ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ f(1)=\frac{1}{1+1}=0,5 \\ f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{(1+1)^2}=-0,25 \end{array}\right\}\Rightarrow y-0,5=-0,25(x-1)\Rightarrow y=-0,25x+0,5+0,25$$

La tangente tiene ecuación $y=-0,25x+0,75$

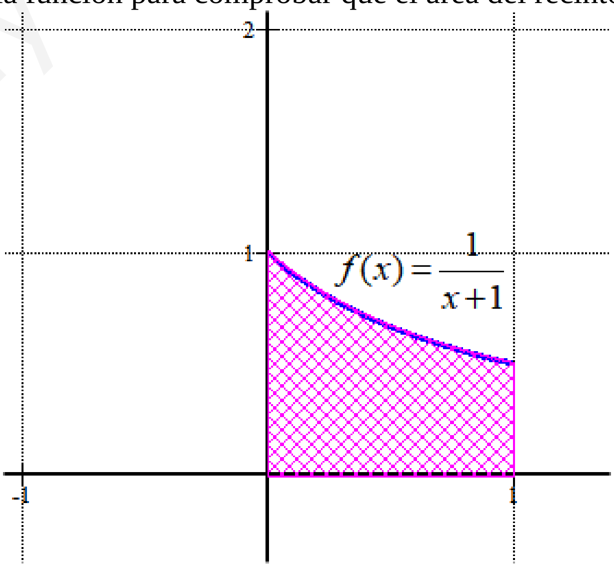
b) Veamos si la función corta al eje en el intervalo [0, 1].

$f(x)=0\Rightarrow\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow 1=0$ No existen puntos de corte con el eje OX

El área pedida es la integral definida entre 0 y 1 de la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

$$\acute{A}rea=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\left[\ln|1+x|\right]_0^1=\left[\ln|1+1|\right]-\left[\ln|1+0|\right]=\boxed{\ln 2=0,69\,u^2}$$

No lo pide, pero dibujo la función para comprobar que el área del recinto tiene ese valor.



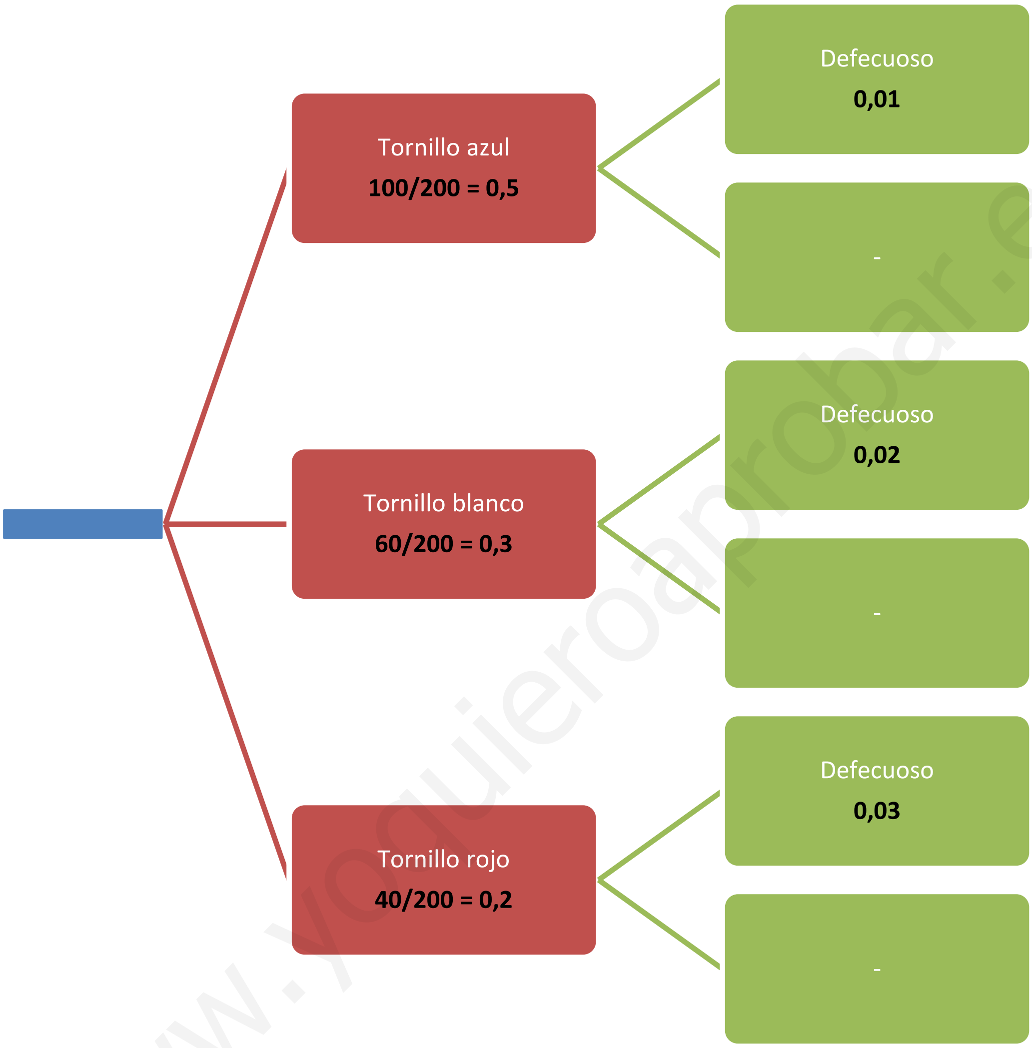
De forma aproximada se corresponde el valor del área con el dibujo.

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0.01 si es azul, 0.02 si es blanco y de 0.03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

Hacemos un diagrama de árbol para clarificar la situación. Hay un total de 100 + 60 + 40 = 200 tornillos.



a) Este suceso aparece en tres ramas del diagrama de árbol, calculamos la probabilidad de cada rama y las sumamos.

$$P(\text{Elegir tornillo defectuoso}) = 0,5\cdot 0,01 + 0,3\cdot 0,02 + 0,2\cdot 0,03 = 0,005 + 0,006 + 0,006 = \boxed{0,017}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea blanco /Es defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea blanco } \cap \text{Es defectuoso})}{P(\text{Sea defectuoso})} =$$

$$= \frac{0,3\cdot 0,02}{0,017} = \frac{0,006}{0,017} = \boxed{\frac{6}{17} = 0,353}$$

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A)=0,3$ y que $P(\overline{B})=0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A\cup B)$ (0.75 puntos)

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (0.5 puntos)

c) $P(A/\overline{B})$ (0.75 puntos)

a) Como $P(\overline{B})=0,4 \Rightarrow 1-P(B)=0,4 \Rightarrow P(B)=0,6$

Como A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0,3\cdot 0,6=0,18$

Por lo que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,3+0,6-0,18=\boxed{0,72}$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,72=\boxed{0,28}$

c) $P(A/\overline{B})=\dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{0,4}=\dfrac{0,3-0,18}{0,4}=\dfrac{0,12}{0,4}=\boxed{0,3}$

OTRA FORMA DE HACER ESTE EJERCICIO.

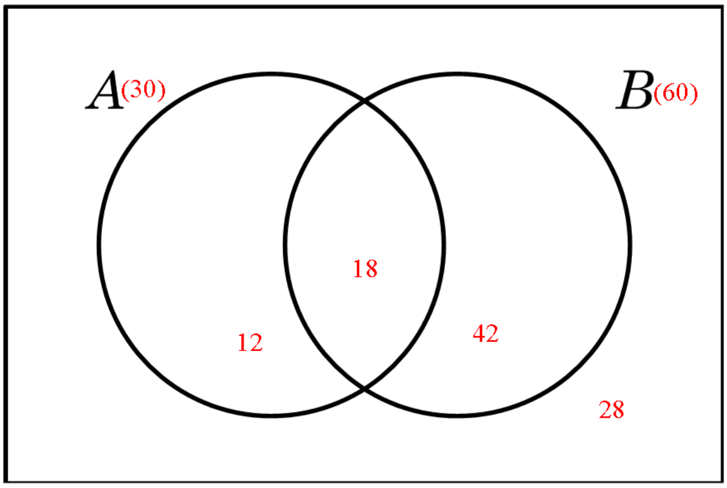
Como $P(A)=0,30$ y $P(\overline{B})=0,40$, deducimos que $P(B)=0,60$ y también que $P(A\cap B)=0,18$.

Esta información la colocamos en un diagrama de Venn donde suponemos 100 elementos en el total y por tanto 30 en A, 60 en B, 18 en la intersección de A y B. Restando también podemos poner 12 en $A\cap\overline{B}$ y 42 en $\overline{A}\cap B$. Por último si hay en $A\cup B$ un total de 12 + 18 + 42 = 72, entonces en $\overline{A\cup B}$ hay 28.

a) $P(A\cup B)=\dfrac{12+18+42}{100}=\boxed{0,72}$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{28}{100}=\boxed{0,28}$

c) $P(A/\overline{B})=\dfrac{12}{12+28}=\boxed{0,3}$



CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100 km.
a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1.25 puntos)
b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

a) X = Consumo medio de gasolina de un automóvil de un concesionario
X = N(μ, 0.5)

La muestra es de tamaño n = 10 y la media muestral es $\overline{x} = 6.5$ litros

Con un nivel de confianza del 95% tenemos que

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow$ $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{10}} = 0.31$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(6.5 - 0.31, 6.5 + 0.31\right) = \left(6.19, 6.81\right)$$

b) Con el nivel de confianza del 95% ya hemos calculado $z_{\alpha/2}$ **= 1,96.**
El Error de 0,2 lo ponemos en la fórmula y despejamos n.

$$Error = 0.2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} = 0{,}2 \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}2} = \sqrt{n}$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}2}\right)^2 = 24{,}01$$

La muestra debe ser al menos de 25 automóviles.

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos).
b) Con el mismo nivel de confianza anterior. ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

a) Sea X la variable aleatoria que mide el PH de una solución. Sabemos que sigue una N(**μ**, 0,02).

La muestra es de 6 mediciones → n = 6, $\bar{x}$ = 7,91
Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

El error del intervalo viene dado por la fórmula

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{6}} = 0{,}016$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(7.91 - 0.016, 7.91 + 0.016\right) = \left(7.894, 7.926\right)$$

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 1,96.**

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = 0.01 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}01} = \sqrt{n}$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}01}\right)^2 = 15{,}36$$

La muestra debe ser de al menos 16 mediciones.