SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1}. **(1 punto)**

b) Calcule el valor del parámetro **a** para que $B+C=A^{-1}$. **(1 punto)**

c) Calcule el valor del parámetro **a** para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

a) Para que exista la inversa de A debe tener determinante no nulo:

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$. Existe la inversa A^{-1}.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ debe cumplir } A^{-1}A=I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+b=1 \\ a+b=0 \\ 2c+d=0 \\ c+d=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+b=1 \\ a=-b \\ 2c+d=0 \\ c=1-d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2b+b=1 \\ 2-2d+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -b=1 \\ -d+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-1 \\ d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ c=1-2=-1 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$B+C=A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1=1 \\ a-1=-1 \\ a-1=-1 \\ 2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

c)

$$A+B+C=3I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

CUESTIÓN A2. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x)=2x^2+4x+98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. **(2 puntos)**

La función Ingresos es $I(x)=40x$

La función beneficio es

$$B(x)=I(x)-C(x)=40x-\left(2x^2+4x+98\right)=40x-2x^2-4x-98=-2x^2+36x-98$$

Para averiguar el máximo de esta función calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$B(x)=-2x^2+36x-98 \Rightarrow B'(x)=-4x+36$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow -4x+36=0 \Rightarrow -4x=-36 \Rightarrow x=\frac{-36}{-4}=9 \text{ unidades}$$

Para comprobar si 9 unidades es un máximo calculamos la derivada segunda y sustituimos x = 9

$$B'(x)=-4x+36 \Rightarrow B''(x)=-4<0$$

$\boxed{X = 9}$ unidades es un **máximo** de la función beneficio.

Este **beneficio máximo** es $B(9)=-2\cdot 9^2+36\cdot 9-98=-162+324-98=324-260=\boxed{64 \text{ euros}}$

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1 \\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & si \quad x>3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$. **(1 punto)**

a) Para que la función $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1 \\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & si \quad x>3 \end{cases}$ sea continua lo debe ser en x = 1 y en x = 3.

En x = 1 es continua:

- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x+a=a+1$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2-2=1-2=-1$
- Existe $f(1)=1^2-2=-1$
- Deben ser iguales. $a+1=-1 \Rightarrow a=-2$

En x = 3 es continua:

- Existe $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x^2-2=9-2=7$
- Existe $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} x+b=3+b$
- Existe $f(3)=3+b$
- Deben ser iguales. $3+b=7 \Rightarrow b=4$

Los valores de los parámetros que hacen continua la función son $\boxed{a=-2 \text{ y } b=4}$.

b) Como es una integral definida en el intervalo $(1,3)$ en este intervalo $f(x)=x^2-2$.

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 x^2-2dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3=\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1\right)=3-\frac{1}{3}+2=5-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{14}{3}}$$

CUESTIÓN A4. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? **(0,75 puntos)**

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(0,75 puntos)**

Construyamos una tabla de contingencia relativa al problema:

El 30% del 65% que son mujeres son bilingües, esto es, $\frac{30 \cdot 65}{100} = \frac{1950}{100} = 19,5\%$ del total.

El 25% del 35% que son hombres son bilingües, esto es, $\frac{25 \cdot 35}{100} = \frac{875}{100} = 8,75\%$ del total

	Bilingües	**No bilingües**	
Hombres	**8,75%**		
Mujeres	**19,5%**		**65%**
			100%

Completemos los datos que faltan:

	Bilingües	**No bilingües**	
Hombres	**8,75%**	**26,25%**	**35%**
Mujeres	**19,5%**	**45,5%**	**65%**
	28,25%	**71,75%**	**100%**

a) P(Elegido un componente que sea bilingüe)=28,25%=0,2825

b)

$$P\left(\text{Elegido un componente que sea mujer, sabiendo que es bilingüe}\right) =$$

$$= P\left(Mujer / Bilingüe\right) = \frac{P(Mujer \ y \ bilingüe)}{P\left(Bilingüe\right)} = \frac{19,5}{28,25} = 0,69$$

CUESTIÓN A5. El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. **(1,5 puntos)**

a)

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo de renovación de un ordenador portátil. Sabemos que sigue una N(**μ**, 0,9).

Utilizamos la fórmula $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ para establecer el intervalo de confianza.

n = 900, $\bar{x}$ = 3,5 años, σ = 0,9 años y como 1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0'025

→1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3,5 - 1,96 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{900}}, 3,5 + 1,96 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{900}}\right)$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (3,4412 , 3'5588)}$$

b)

El error máximo que se puede cometer es de $\pm 0,588\ años$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. **(3 puntos)**

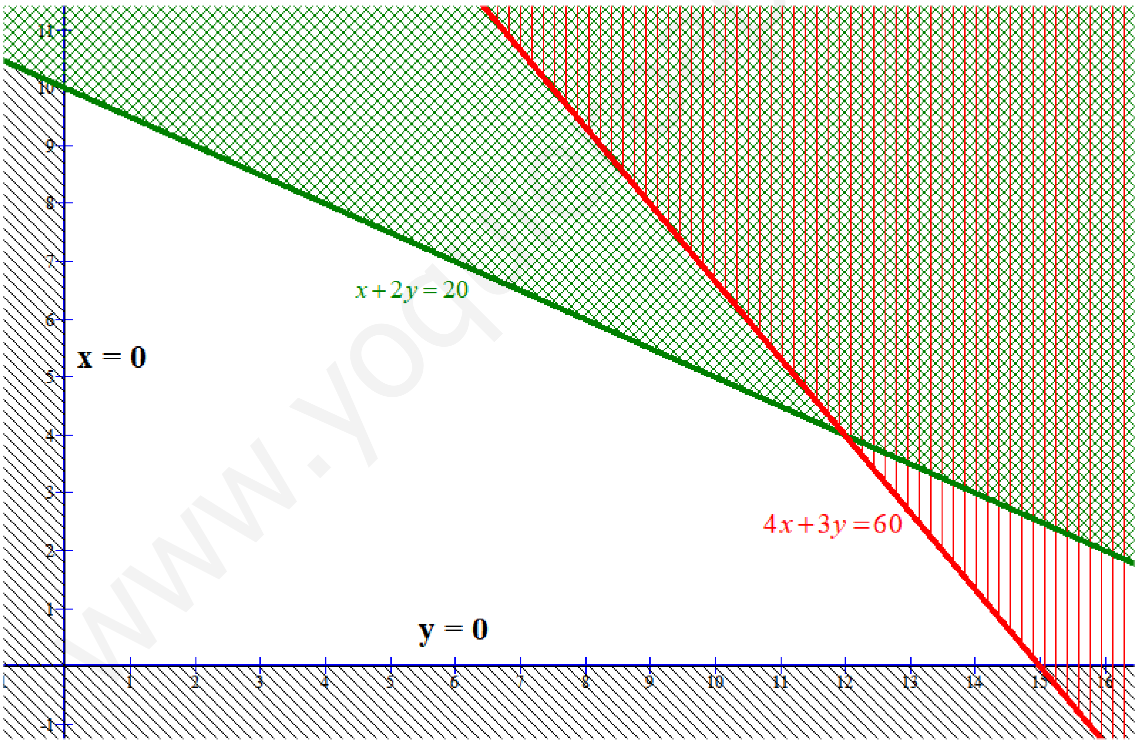
Llamemos x = número de dulces del tipo A e y = número de dulces del tipo B.

Para elaborar x dulces del tipo A necesitaré $\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$ kilos de azúcar y 8x huevos.

Para elaborar y dulces del tipo B necesitaré x kilos de azúcar y 6x huevos.
Las restricciones aplicables al problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujemos la región factible (donde está la solución del problema)



Nuestra solución estará en uno de los vértices del triángulo blanco del dibujo. Averiguamos sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10$$ Un punto es A(0,10)

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 4x + 3y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15$$ Un segundo punto es B(15,0)

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=20 \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+20 \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(-2y+20)+3y=60 \Rightarrow -8y+80+3y=60$$

$$-5y=-20 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=-2\cdot 4+20=20-8=12$$

Un tercer punto es C(12,4)

Determinemos la función beneficio sabiendo que por x dulces del tipo A ganaré 15x y por y dulces del tipo B ganaré 12y. Conjuntamente:

$$Beneficio = 15x+12y$$

Sustituyendo cada punto podremos decidir el punto solución:

$$A(0,10) \rightarrow Beneficio(0,10)=15\cdot 0+12\cdot 10=120\text{ €}$$
$$B(15,0) \rightarrow Beneficio(15,0)=15\cdot 15+12\cdot 0=225\text{ €}$$
$$C(12,4) \rightarrow Beneficio(12,4)=15\cdot 12+12\cdot 4=228\text{ €}$$

El máximo beneficio se obtiene para x = 12 e y = 4.

El máximo beneficio (228 €) se obtiene con 12 dulces del tipo A y 4 del tipo B.

CUESTIÓN B2.

a) Sea la función $f(x)=ax^3+bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale –3. **(1 punto)**

b) Si en la función anterior $a=1$ y $b=-12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. **(1 punto)**

a) Primera condición:

$$f(1)=a\cdot 1^3+b\cdot 1=a+b \Rightarrow 1=a+b$$

Segunda condición:

La pendiente de la recta tangente en (1,1) es el valor de la derivada en x = 1.

$f(x)=ax^3+bx \Rightarrow f\,'(x)=3ax^2+b$ sustituyendo x = 1:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=3ax^2+b \\ f\,'(1)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a\cdot 1^2+b=-3 \Rightarrow 3a+b=-3$$

Juntando las dos ecuaciones nos surge el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ 3a+b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=1-a \\ 3a+b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a+1-a=-3 \Rightarrow 2a=-4 \Rightarrow a=-2$$

$$b=1-a \Rightarrow b=1+2=3$$

Los valores pedidos son a = –2 y b = 3

b) Sustituimos en la función los valores dados $f(x)=x^3-12x$.

Calculemos su derivada: $f\,'(x)=3x^2-12$

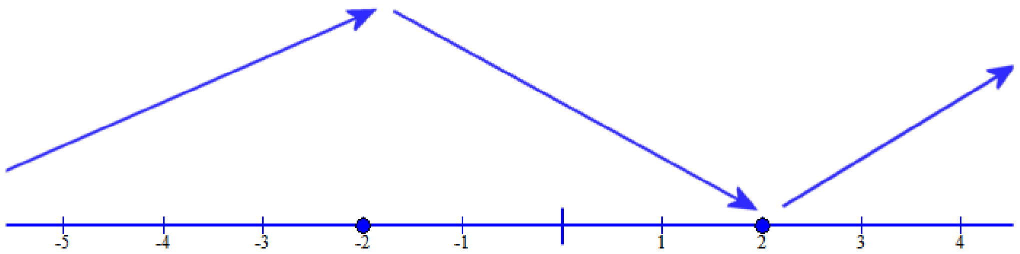
Igualamos a cero: $f\,'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=\frac{12}{3}=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

Veamos el comportamiento de la derivada en los distintos intervalos en que se divide la recta real:

En $(-\infty,-2)$ tomamos un valor $x=-3 \Rightarrow f\,'(-3)=3(-3)^2-12=27-12=15>0$ La función crece.

En $(-2,2)$ tomamos un valor $x=0 \Rightarrow f\,'(0)=3(0)^2-12=-12<0$ La función decrece.

En $(2,+\infty)$ tomamos un valor $x=3 \Rightarrow f\,'(3)=3(3)^2-12=27-12=15>0$ La función crece.



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-2,2)$

Tiene un máximo relativo en x = –2 y un mínimo relativo en x = 2.

CUESTIÓN B3. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las rectas $y=6-2x$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$. Calcular su área. **(2 puntos)**

Para representar la recta basta con una tabla de valores:

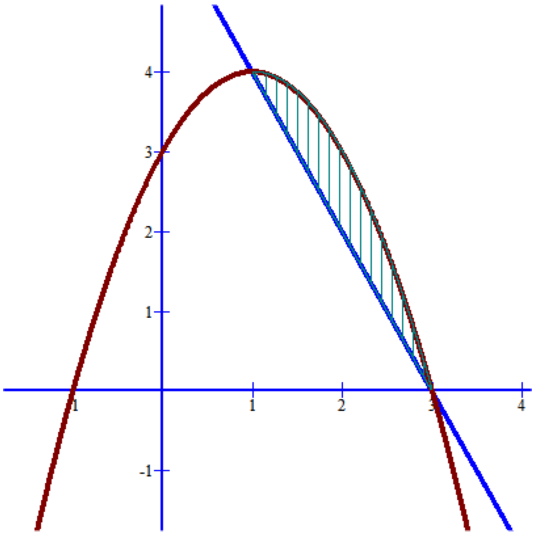
x	$y=6-2x$
1	$6-2=4$
0	$6-0=6$

Y para la parábola, hallamos su vértice y algunos puntos más:

$$y=-x^2+2x+3 \Rightarrow x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1 \Rightarrow y_v=-1^2+2\cdot 1+3=-1+2+3=4$$

$Vértice(1,4)$

x	$y=-x^2+2x+3$
1	4
0	$-0+0+3=3$
2	$-2^2+2\cdot 2+3=3$
-1	$-(-1)^2+2\cdot(-1)+3=-1-2+3=0$



La recta y la parábola se cortan en:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2x+3 \\ y=6-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6-2x=-x^2+2x+3 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases} x=\frac{4+2}{2}=3 \\ x=\frac{4-2}{2}=1 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos funciones es una integral definida con limites de integración 1 y 3. La función a integrar es la diferencia entre la parábola y la recta.

$$Área=\int_1^3 -x^2+2x+3-(6-2x)\,dx=\int_1^3 -x^2+4x-3dx=\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3=$$

$$=\left(\frac{-3^3}{3}+2\cdot3^2-3\cdot3\right)-\left(\frac{-1^3}{3}+2\cdot1^2-3\cdot1\right)=-9+18-9-\left(\frac{-1}{3}+2-3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}u^2$$

El área de la región es 4/3 u^2

CUESTIÓN B4. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,2$ y $P(A/B)=0,5$. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. **(1,5 puntos)**

Como $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$P(A/B)=0,5\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,5\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,2}=0,5\Rightarrow P(A\cap B)=0,5\cdot0,2=0,1$$

También se cumple $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,3+0,2-0,1=0,4$

CUESTIÓN B5. El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. **(1,5 puntos)**

Para el nivel de confianza del 95% corresponde un valor crítico de $z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$. σ = 10.

Si el error $z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es igual a 5 entonces

$$1,96\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}=5\Rightarrow19,6=5\cdot\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{19,6}{5}=3,92\Rightarrow n=3,92^2=15,36$$

La muestra debe tener un tamaño mínimo de 16 estudiantes.