SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discute el siguiente sistema en función del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right\}$$ (2'5 puntos)

Resuélvelo para **a = 2**. (0'5 puntos)

Del sistema consideramos su matriz de coeficientes y calculamos su determinante:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+2a+0-(-a+0+1)=3a-3$$

Si igualamos el determinante a cero → $3a-3=0 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1$

Distinguimos dos casos:

Caso 1º. a ≠ 1

El determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo y por tanto:

Rango A = Rango Ampliada = 3 = número de incógnitas → El sistema tiene una única solución (S.C.D.)

Caso 2º. a = 1

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ x+y-2z=4 \end{array}\right\}$$ Transformándolo en sistemas equivalentes más sencillos.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ x+y-2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} Fila3^{a}-Fila1^{a} \to Fila3^{a} \\ x+y-2z=4 \\ \underline{-x-2y+z=-6} \\ -y-z=-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ -y-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} Fila3^{a}+Fila2^{a} \to Fila3^{a} \\ -y-z=-2 \\ \underline{y+z=1} \\ 0=-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ 0=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El sistema no tiene solución (Sistema incompatible)}$$

Para a = 2 el sistema es compatible determinado, hallemos su solución

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} Fila3^{a}-2\cdot Fila1^{a} \to Fila3^{a} \\ 2x+y-2z=4 \\ \underline{-2x-4y+2z=-12} \\ -3y=-8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ \boxed{y=\frac{8}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2\cdot\frac{8}{3}-z=6 \\ \frac{8}{3}+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-z=6-\frac{16}{3}=\frac{2}{3} \\ \boxed{z=1-\frac{8}{3}=\frac{-5}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{5}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=-1}$$

La solución es $\boxed{x=-1;\ y=\frac{8}{3};\ z=\frac{-5}{3}}$

CUESTIÓN A2. Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(\mathrm{x}) = 2x^2 - 45x + 100$, donde x es el número de unidades de producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo (2 puntos).

La función Beneficio que deseamos maximizar es:

$$B(x) = Ingresos - Costes = 15x - \left(2x^2 - 45x + 100\right) = -2x^2 + 60x - 100$$

Derivamos e igualamos a cero para encontrar dicho máximo.

$$B'(x) = -4x + 60 = 0$$

$$x = \frac{-60}{-4} = 15 \text{ unidades del producto}$$

$$B''(x) = -4$$

$$B''(15) = -4 < 0$$

Por lo que 15 unidades nos aportan un beneficio máximo de

$$B(15) = -2 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 - 100 = -450 + 900 - 100 = 350 \text{ unidades monetarias}$$

CUESTIÓN A3. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área. (1,5 puntos)

Averigüemos donde la función $y = x^2 - x - 2$ corta al eje OX

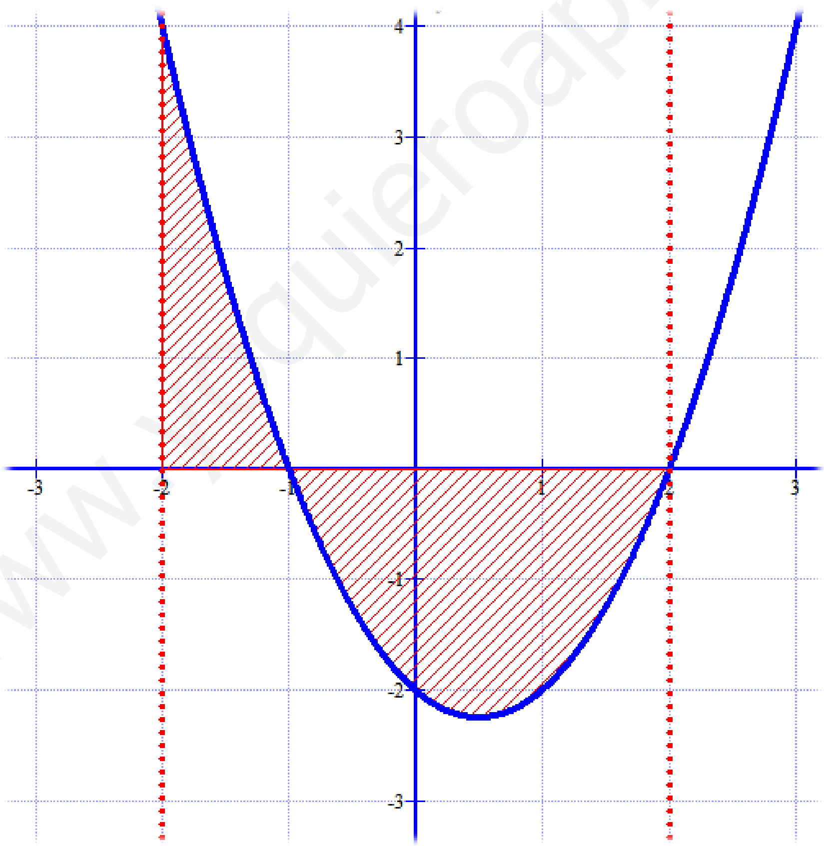
$$0 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

El valor x=-1 está situado entre x = –2 y x = 2, por lo que el área pedida se calculará como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas

$$\acute{A}rea = \left| \int_{-2}^{-1} x^2 - x - 2dx \right| + \left| \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^{2} \right| =$$

$$= \left| \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) \right) \right| + \left| \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{-8}{3} - 2 + 4 \right) \right| + \left| \frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| = \boxed{\frac{19}{3} \text{ u}^2}$$

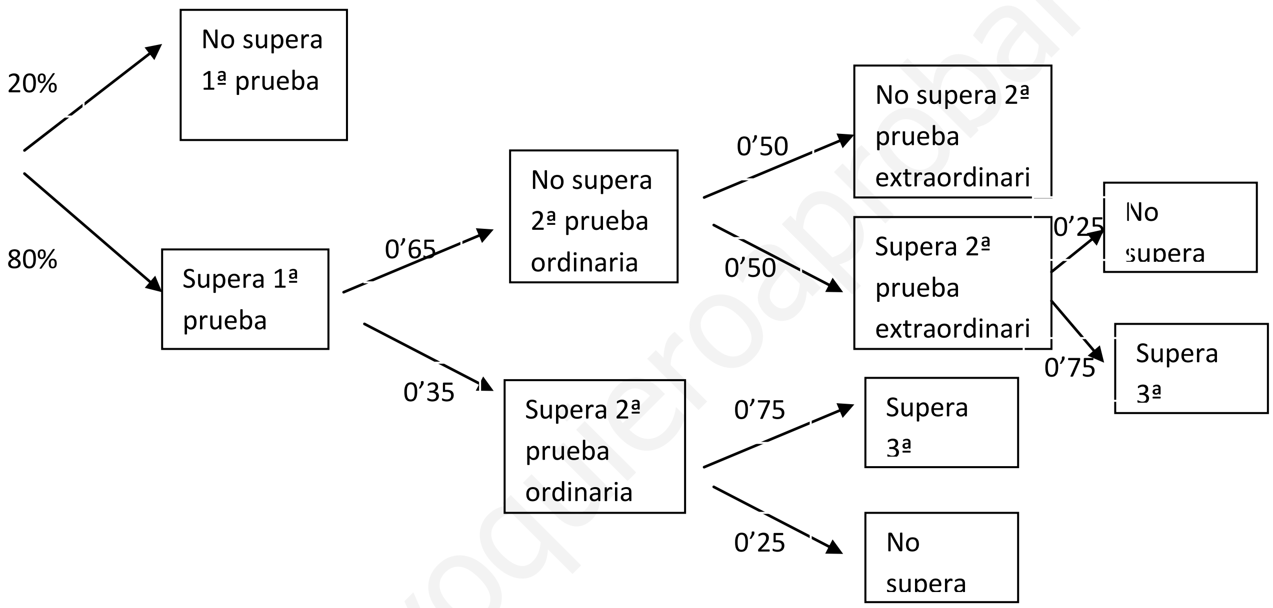


CUESTIÓN A4. El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80% de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan aprobado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35% de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50% de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75% de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas. (1,5 puntos)

b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura. (0,5 puntos)

Construyamos un árbol que nos aclare la situación



Con este esquema, respondemos a las preguntas:

a) P(Superar las dos primeras pruebas) = 0’8 · 0’35 + 0’8 · 0’65 · 0’5 = $\boxed{\textbf{0’504}}$

b) P(Superar las tres pruebas) = 0’8 · 0’35 · 0’75 + 0’8 · 0’65 · 0’5 · 0’75 = $\boxed{\textbf{0’405}}$

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de tamaño 200 de árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar el intervalo de confianza al 90% para la proporción de árboles que tienen la plaga. (1,5 puntos)

Buscamos en la tabla de la normal $Z_{1-\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90% es $Z_{1-\alpha/2}=1'645$.

Conocemos n=200

$$p=\frac{45}{200}=0'225$$

$$1-p=1-\frac{45}{200}=\frac{155}{200}$$

La fórmula del intervalo de confianza es $\left(p-z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},\quad p+z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$ y al 90 % de confianza y con los datos del ejercicio sería:

$$\left(\frac{45}{200}-1'645\cdot\sqrt{\frac{\frac{45}{200}\cdot\frac{155}{200}}{200}},\quad \frac{45}{200}+1'645\cdot\sqrt{\frac{\frac{45}{200}\cdot\frac{155}{200}}{200}}\right)$$

$$(0'225-0'049,\quad 0'225+0'049)=$$

$$(0'176,\ 0'274)$$

Seria entre un 17 % y un 27%

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m^2 de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m^2 de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m^2 de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo. (3 puntos)

Llamemos x al número de bolsos del modelo A e y al número de bolsos del modelo B.

El beneficio es $B(x,y)=50x+80y$. Función a maximizar.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ En\ cuanto\ a\ la\ \ piel\ 5x+5y\leq 200 \Rightarrow x+y\leq 40 \\ En\ cuanto\ a\ horas\ \text{de}\ trabajo\ 5x+10y\leq 225 \Rightarrow x+2y\leq 45 \\ x\geq y \end{cases}$$

Dibujemos la región factible atendiendo a estas restricciones:

Las rectas que separan la zona solución son

$$x=0$$
$$y=0$$
$$x+y=40$$
$$x+2y=45$$
$$y=x$$

Vamos a dibujar las rectas para delimitar mi región factible.

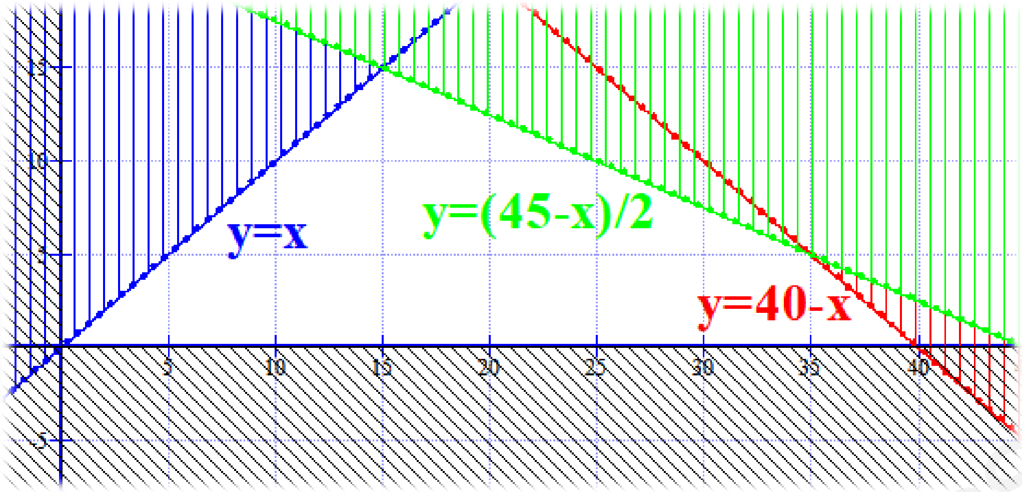
$x+y=40 \rightarrow y=40-x$ $\qquad$ $x+2y=45 \rightarrow y=\dfrac{45-x}{2}$

x	$y=40-x$
40	0
0	40

x	$y=\dfrac{45-x}{2}$
45	0
5	20

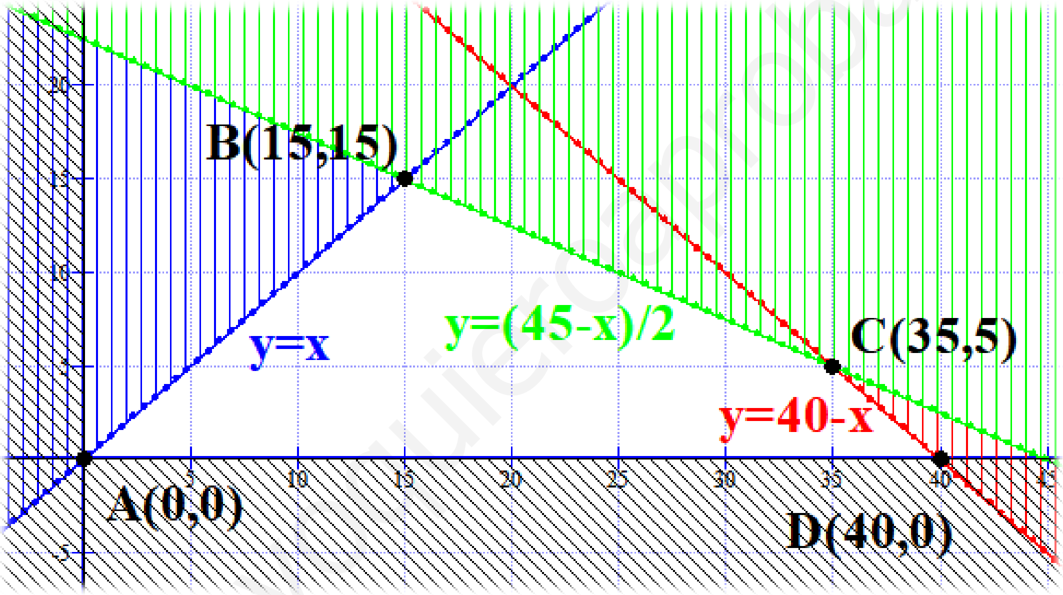
x	$y=x$
40	40
0	0

Dibujando dichas rectas y rayando la parte del plano que no es solución, obtendremos un dibujo parecido al siguiente:



Determinemos los puntos candidatos a ser máximos para la función coste $B(x,y)=50x+80y$.

Son los puntos de corte de las rectas que delimitan la región factible (de color blanco)
Resolviendo cada uno de los sistemas, obtenemos:



Valoremos la función objetivo $B(x,y)=50x+80y$ en cada uno de estos puntos y decidimos cual tiene el mínimo coste.

$$A(0,0) \to B(0,0) = 0 \text{ €}$$
$$B(15,15) \to B(15,15) = 750 + 1200 = 1950 \text{ €}$$
$$C(35,5) \to B(35,5) = 1750 + 400 = 2150 \text{ €}$$
$$D(40,0) \to B(40,0) = 2000 + 0 = 2000 \text{ €}$$

El beneficio máximo es para el punto C (35, 5) que significa fabricar 35 bolsos del tipo A y 5 del tipo B. Dicho beneficio máximo es de 2150 €

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $\mathrm{g}(x)=x^2\ln(x^2)$. (0,75 puntos)

c) $h(x)=e^{-3x+x^2}$. (0,5 puntos)

a)

$$f(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}=-(5x-1)^{-1/5}$$

$$f'(x)=-\frac{-1}{\cancel{5}}(5x-1)^{-1/5-1}\cdot\cancel{5}=(5x-1)^{-6/5}=\boxed{\frac{1}{\sqrt[5]{(5x-1)^6}}}$$

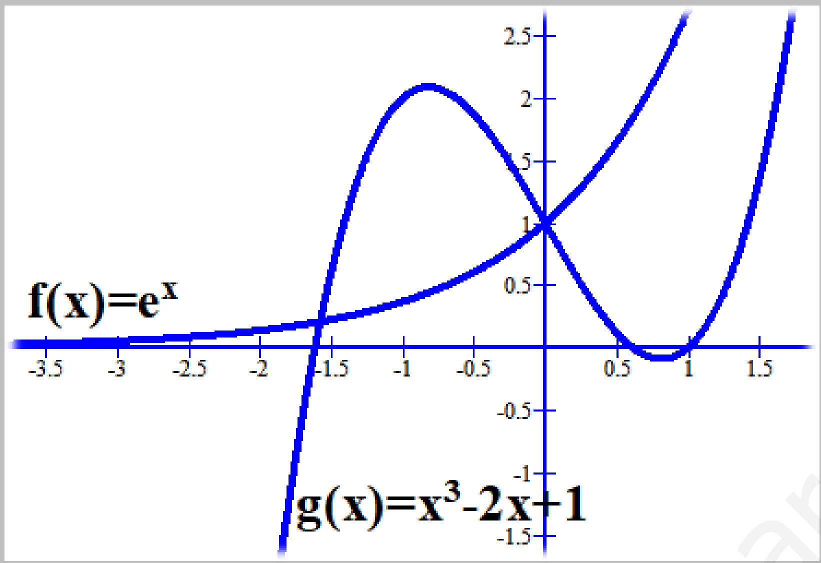
b)

$$\mathrm{g}'(x)=2x\ln(x^2)+\mathrm{x}^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\boxed{2x\ln(x^2)+2x}$$

c)

$$h'(x)=e^{-3x+x^2}\cdot(-3+2x)$$

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=x^3-2x+1$, cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura:



Hallar el área del recinto limitado por las dos gráficas y las rectas x = –1 y x = 0. (1,5 puntos)

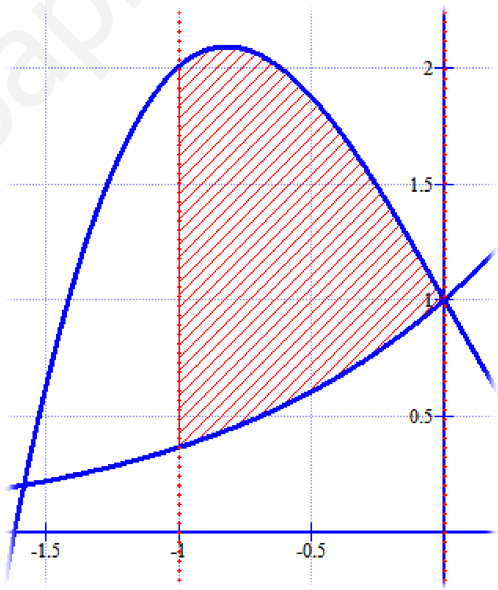
Le añadimos al dibujo las dos rectas verticales x = –1 y x = 0

$$Área=\int_{-1}^{0}\left(x^3-2x+1\right)-e^x dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^2+x-e^x\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left(\frac{0^4}{4}-0^2+0-e^0\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^2-1-e^{-1}\right)=$$

$$=-1-\frac{1}{4}+1+1+\frac{1}{e}=\boxed{1'11\,u^2}$$



CUESTIÓN B4. La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0,2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:
a) No llegue con retraso ninguna de las veces.
b) Llegue con retraso al menos una vez.
c) Al menos tres veces llegue con retraso.
d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas. (2 puntos)

PRIMERA FORMA DE RESOLVERLO

Usando propiedades de la probabilidad.

a) P(no llega con retraso ninguna vez)=P(No llega con retraso la 1ª y No llega con retraso la 2ª y No llega con retraso la 3ª y No llega con retraso la 4ª) = 0’8 · 0’8 · 0’8 · 0’8 = $\boxed{0'41}$

b) P(Llegue con retraso al menos una vez) = 1 – P(No llega con retraso ninguna vez) = 1 – 0’41 = $\boxed{0'59}$

c) P(Al menos tres veces llegue con retraso) = P(Llegue con retraso las 4 veces) + P(Llegue sin retraso solo la 1ª vez) + P(Llegue sin retraso solo la 2ª vez) + P(Llegue sin retraso solo la 3ª vez) + P(Llegue sin retraso solo la 4ª vez) = 0’2 · 0´2 · 0´2 · 0´2 + 0’8 · 0’2 · 0’2 · 0’2 + 0’2 · 0’8 · 0’2 · 0’2 + 0’2 · 0’2 · 0’8 · 0’2 + 0’2 · 0’2 · 0’2 · 0’8 = $\boxed{0'0272}$

d) P(Llegue con retraso exactamente 2 veces consecutivas) = P(Llegue con retraso solo la 1ª y la 2ª vez) + P(Llegue con retraso solo la 2ª y la 3ª vez) + P(Llegue con retraso solo la 3ª y la 4ª vez) = 0’2 · 0’2 · 0’8 · 0’8 + 0’8 · 0’2 · 0’2 · 0’8 + 0’8 · 0’8 · 0’2 · 0’2 = 3 · 0’2 · 0’2 · 0’8 · 0’8 = $\boxed{0'077}$

SEGUNDA FORMA DE RESOLVERLO

Con el uso de la binomial.
Decido que sea X = “número de veces que pasa con retraso el autobús en las 4 veces diarias”
Esta es una variable binomial pues las repeticiones son independientes entre si y solo puede pasar “pasar con retraso” o “ pasar sin retraso”.
p = P(el autobús pase con retraso”) = 0,2. q = P(el autobús pase sin retraso) = 1 – 0,2 = 0,8.

X es B(4, 0´2)

a) $P(X=0)=\binom{4}{0}0'2^0\cdot 0'8^4=0'8^4=\boxed{0,4096}$

b) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}0'2^0\cdot 0'8^4=1-0'8^4=1-0,4096=\boxed{0,5904}$

c)
$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{4}{3}0'2^3\cdot 0'8^1+\binom{4}{4}0'2^4\cdot 0'8^0=$$
$$=4\cdot 0'2^3\cdot 0'8^1+0'2^4=\boxed{0,0272}$$

d) Este apartado no podemos hacerlo con binomial, pues especifica que sean consecutivas. No dice que llegue con retraso dos veces, sino dos veces **consecutivas**.

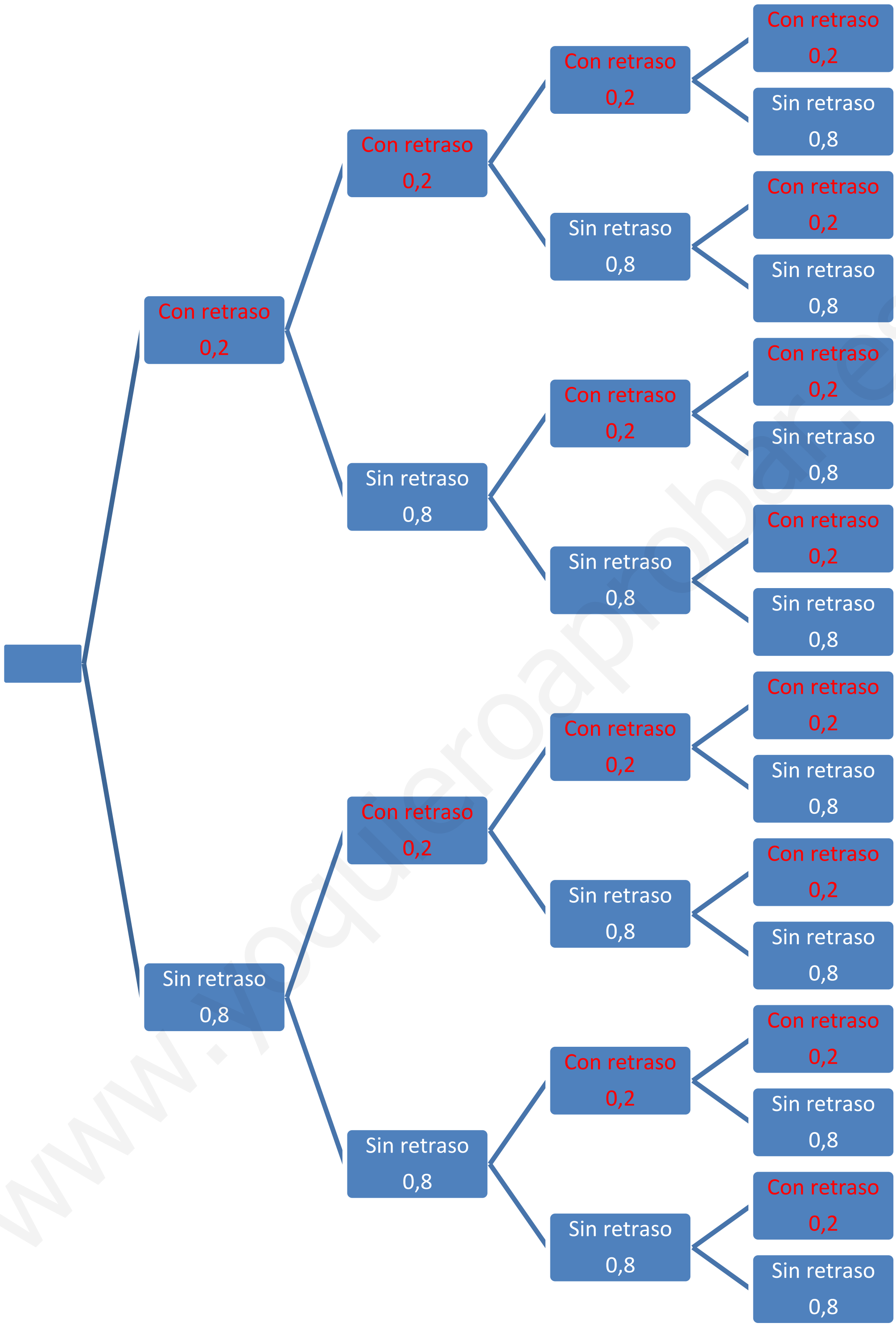
Hay $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2}=6$ formas de llegar 2 veces con retraso. Pero de esas 6 solamente 3 son las formas de que lo haga de forma consecutiva: 1ª y 2ª parada, 2ª y 3ª parada, 3ª y 4ª parada.

La probabilidad pedida es:

P(Llegue con retraso dos veces consecutivas = 3 · $0,2^2$ · $0´8^2$ = $\boxed{0,0768}$

TERCERA FORMA DE RESOLVERLO

Con diagrama de árbol.

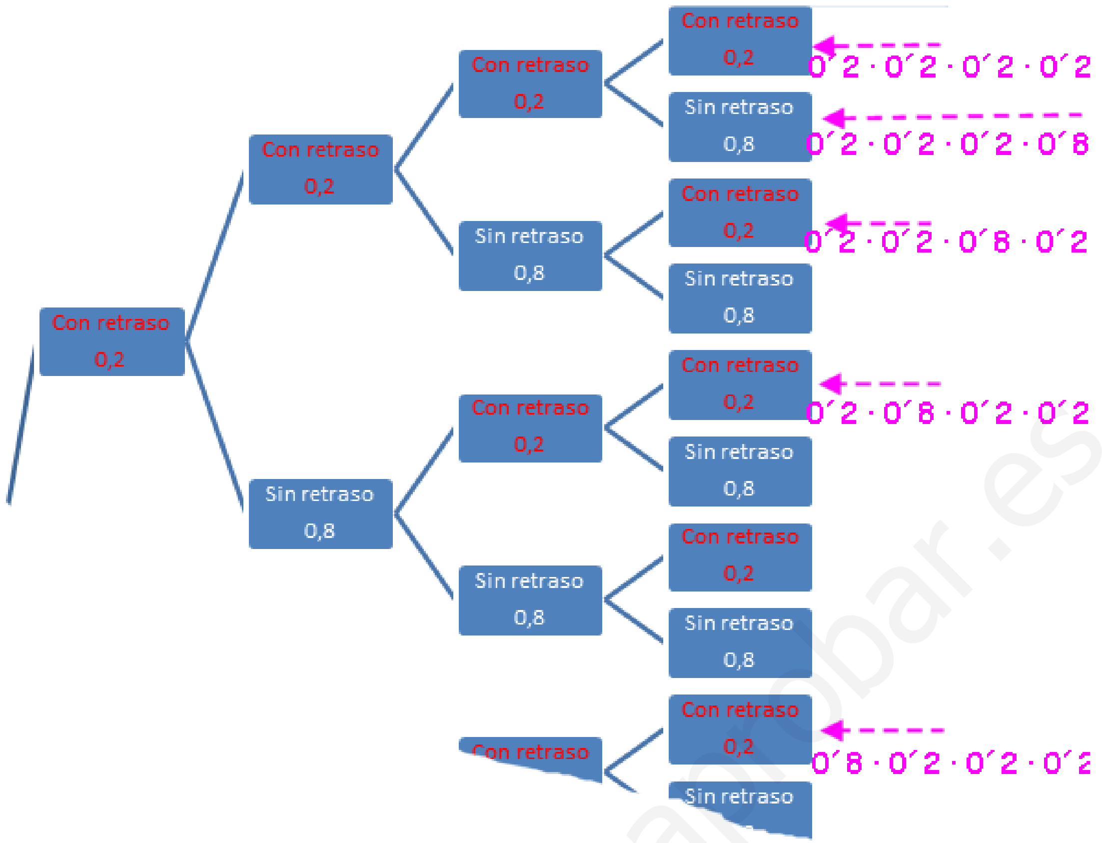


a) Esta suceso ocurre solo en la rama inferior.
P(no llega con retraso ninguna vez) = P(Llega sin retraso 1ª, 2ª, 3ª y 4ª parada) =
= 0’8 · 0’8 · 0’8 · 0’8 = $\boxed{0’41}$

b) Este suceso ocurre en muchas ramas. Lo intentamos hacer con el suceso contrario.
P(Llegue con retraso al menos una vez) = 1 – P(Llega sin retraso siempre) =
Que llegue sin retraso siempre lo hemos calculado en el apartado a)

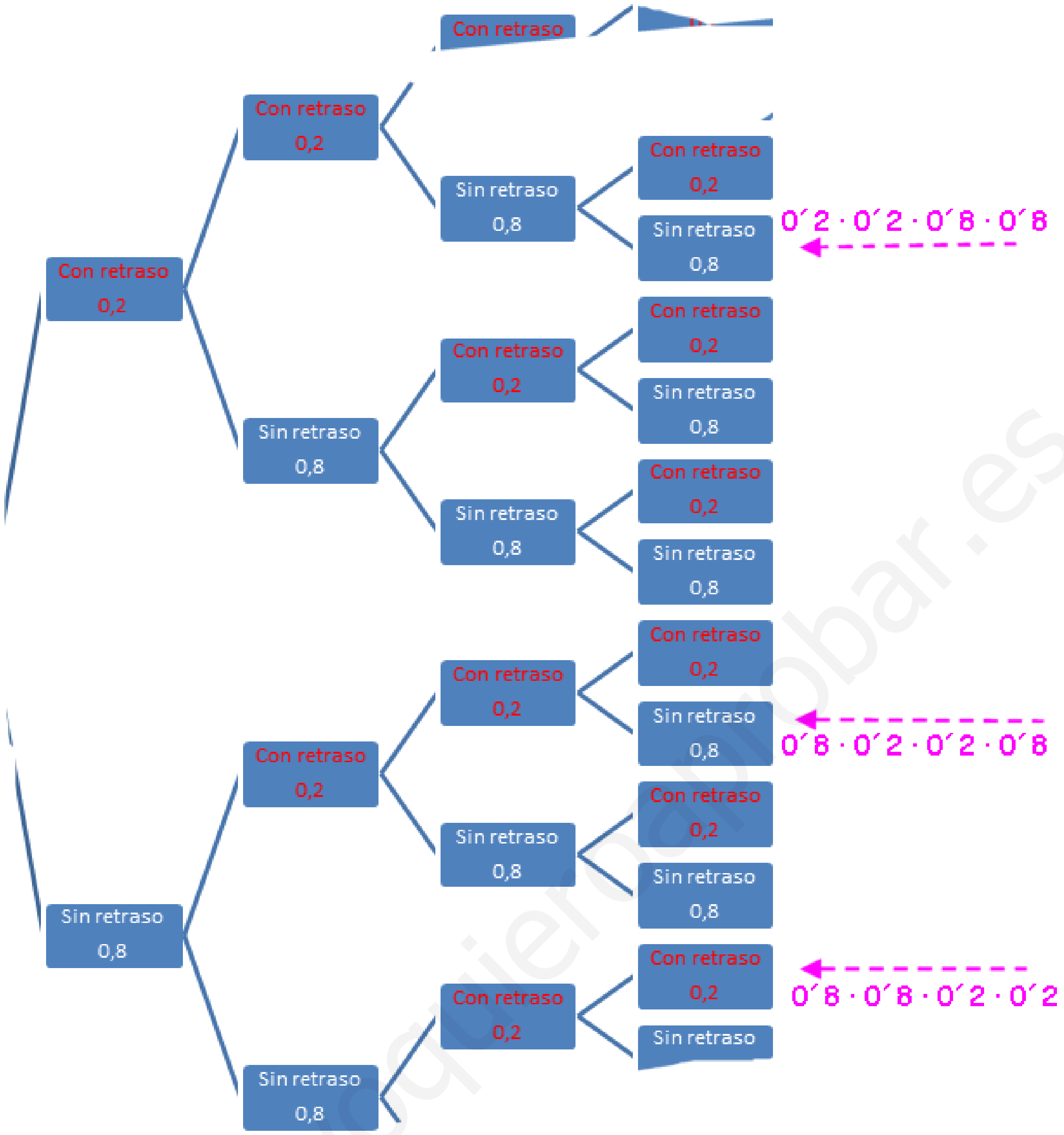
= 1 – 0’41 = $\boxed{0’59}$

c) Este suceso ocurre en las ramas que remarco:



P(Al menos tres veces llegue con retraso) =
= 0’2 · 0´2 · 0´2 · 0´2 + 0’2 · 0’2 · 0’2 · 0’8 + 0’2 · 0’2 · 0’8 · 0’2 + 0’2 · 0’8 · 0’2 · 0’2 + 0’8 · 0’2 · 0’2 · 0’2 = $\boxed{0'0272}$

d) Este suceso ocurre en las ramas que se señalan:



P(Llegue con retraso exactamente 2 veces consecutivas) =
= 0’2 · 0’2 · 0’8 · 0’8 + 0’8 · 0’2 · 0’2 · 0’8 + 0’8 · 0’8 · 0’2 · 0’2 =
= 3 · 0’2 · 0’2 · 0’8 · 0’8 = $\boxed{0'077}$

CUESTIÓN B5. La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es (135´2, 154´8), hallar el valor de σ. (1,5 puntos)

El error en ese intervalo de confianza es 154'8 – 145 = 9'8
Como el error sigue la fórmula:

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Los datos proporcionados son n = 100 y $\alpha = 0'05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

La fórmula del error queda:

$$9'8 = 1'96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \rightarrow 9'8 \cdot 10 = 1'96 \cdot \sigma \rightarrow \boxed{\sigma = \frac{98}{1'96} = 50}$$