SOLUCIONES

Este documento es largo porque algunos ejercicios aparecen resueltos de distintas formas. Dando la posibilidad de comprobar qué método resulta más ventajoso en cada caso.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcular A^t. (0,25 puntos)

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

b) Calcular A · B. (0,75 puntos)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2+3 & -1+0+3\\ 0+2-1 & 0+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

c) Hallar la matriz $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que cumple A · B ·X = C + I donde $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad. (2 puntos)

$$A\cdot B\cdot X = C + I$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a+2c=2\\ 3b+2d=-2\\ a-c=0\\ b-d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+2c=2\\ 3b+2d=-2\\ a=c\\ b=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3c+2c=2\\ 3d+2d=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5c=2\\ 5d=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2/5\\ d=-2/5\end{cases}$$

$$a=c=2/5$$

$$b=d=-2/5$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}2/5 & -2/5\\ 2/5 & -2/5\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A2. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo *t* (en años) viene dado por la función

$$f(t)=t^3-24t^2+180t+8000 \quad 0\le t\le 11$$

Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año (t = 11). (1,5 puntos)

$$f(11)=11^3-24\cdot 11^2+180\cdot 11+8000=\boxed{8407 \text{ millones de litros}}$$

b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. (1,5 puntos)

Utilicemos la derivada de la función $f(t)=t^3-24t^2+180t+8000$

$$f'(t)=3t^2-48t+180$$

$$f'(t)=0\to 3t^2-48t+180=0\xrightarrow{\text{Simplificamos dividiendo entre 3}}t^2-16t+60=0$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 1\cdot 60}}{2}=\frac{16\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{16\pm 4}{2}=\begin{cases}=\dfrac{16+4}{2}=10\\[2mm]=\dfrac{16-4}{2}=6\end{cases}$$

Hay dos candidatos a ser máximo: t = 6 y t = 10.
Con la segunda derivada vemos cual es:

$$f''(t)=6t-48\Rightarrow\begin{cases}t=6\to f''(6)=36-48=-12<0\to t=6 \text{ es máximo}\\ \text{t=10}\to f''(10)=60-48=12>0\to t=10 \text{ es mínimo}\end{cases}$$

$\boxed{\text{El almacenamiento máximo se produjo en el año 6}}$

c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo. (0,25 puntos)

Para t = 6 los millones de litros almacenados son $f(6)=6^3-24\cdot 6^2+180\cdot 6+8000=\boxed{8432 \text{ } millones}$

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2\left(-x^2+3x+1\right)dx$. (0,75 puntos)

$$\int_1^2\left(-x^2+3x+1\right)dx=\{\text{Calculamos la primitiva y despues aplicamos la regla de Barrow}\}=$$

$$\int\left(-x^2+3x+1\right)dx=-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=\left(-\frac{2^3}{3}+3\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+3\frac{1^2}{2}+1\right)=\frac{-8}{3}+6+2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-1=$$

$$=-\frac{7}{3}+7-\frac{3}{2}=\frac{-14+42-9}{6}=\boxed{\frac{19}{6}}$$

b) $\int\frac{2}{x+2}dx$. (0,75 puntos)

$$\int\frac{2}{x+2}dx=2\int\frac{1}{x+2}dx=\boxed{2\ln|x+2|+C}$$

CUESTIÓN A4. Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas.

Escribamos las distintas formas en que podemos extraer esas tres bolas:

123
132
231
213
312
321

Todas ellas son igual de probables. Para calcular las probabilidades basta con contar los casos favorables y los posibles y aplicar la regla de Laplace

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares. (1 punto)

123
132
231 OK
213 OK
312
321

$P(2 \text{ últimas bolas impares}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0'33$ P(2 últimas bolas impares)=

b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes: S_1:"sale número par antes de alguno de los impares" y S_2:"los dos números impares salen consecutivamente". (1 punto)

123 OK
132
231 OK
213 OK
312
321 OK

S_1="Par antes de alguno impar"="Salga par en 1º o 2º lugar"={123, 231, 213, 321}

123
132 OK
231 OK
213 OK
312 OK
321

S_2="Los impares consecutivos"={132, 231, 213, 312}

$$S_1 \cap S_2 = \{123,\ 231,\ 213,\ 321\} \cap \{132,\ 231,\ 213,\ 312\} = \{231, 213\}$$

Dos sucesos son independientes si $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2)$

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{2}{6}$$

$$P(S_1) \cdot P(S_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Siendo distintos los resultados, los sucesos S_1 y S_2 son dependientes

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90% para la proporción de mayores de 65 años de la población. (1,5 puntos)

Buscamos en la tabla de la normal $Z_{1-\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90% es $Z_{1-\alpha/2}$=1'645.

Conocemos n=175

$$p = \frac{30}{175} = 0'171$$

$$1 - p = 1 - \frac{30}{175} = \frac{145}{175}$$

La fórmula del intervalo de confianza es $\left(p - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$ y al 90 % de confianza y con los datos del ejercicio sería:

$$\left(\frac{30}{175} - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{30}{175} \cdot \frac{145}{175}}{175}},\ \frac{30}{175} + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{30}{175} \cdot \frac{145}{175}}{175}} \right)$$

$$(0'171 - 0'049,\quad 0'171 + 0'049) =$$
$$(0'122, 0'22)$$

$\boxed{\text{Seria entre un 12 \% y un 22\%}}$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo. (3 puntos)

Llamemos x a los metros de tela pedidos al distribuidor A , que cuestan a 2 €/m .
Este pedido cuesta 2x €

Llamemos y a los metros de tela pedidos al distribuidor B, que cuestan a 3 €/m.
Este pedido cuesta 3y €

El coste de la compra es $C(x,y) = 2x+3y$. Función a minimizar.

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{r}\text{El pedido a A (x) es como minimo 200 m y como maximo 700 m } \rightarrow 200 \leq x \leq 700 \\ \text{El pedido a B (y) es como minimo 200 m y como maximo 700 m} \rightarrow 200 \leq y \leq 700 \\ \text{Un pedido total (x+y) de un minimo de 600 m } \rightarrow 600 \leq x+y \\ \text{El pedido a A (x) como máximo el doble del pedido a B (y) } \rightarrow x \leq 2y\end{array}\right\}$$

Dibujemos la región factible atendiendo a estas restricciones:

Las rectas que separan la zona solución son

$x = 200 \quad x = 700$

$y = 200 \quad y = 700$

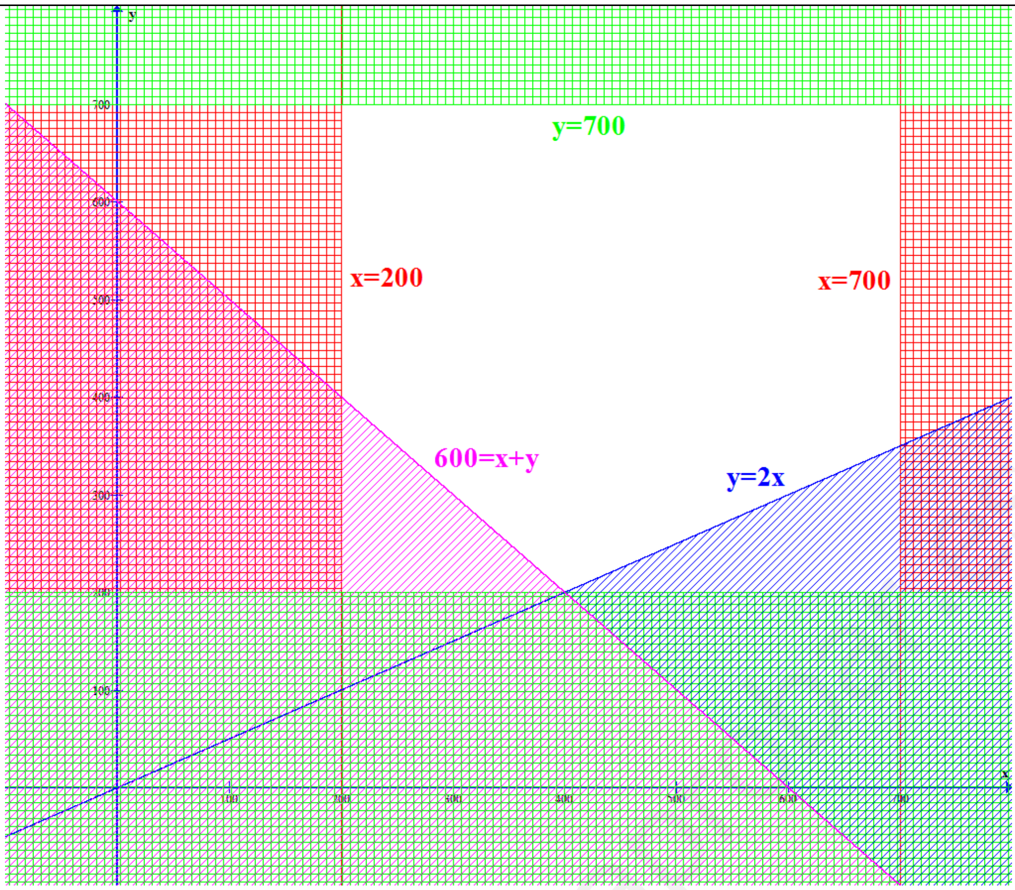
$$x + y = 600 \rightarrow y = 600 - x$$

x	$y = 600 - x$
200	400
600	0

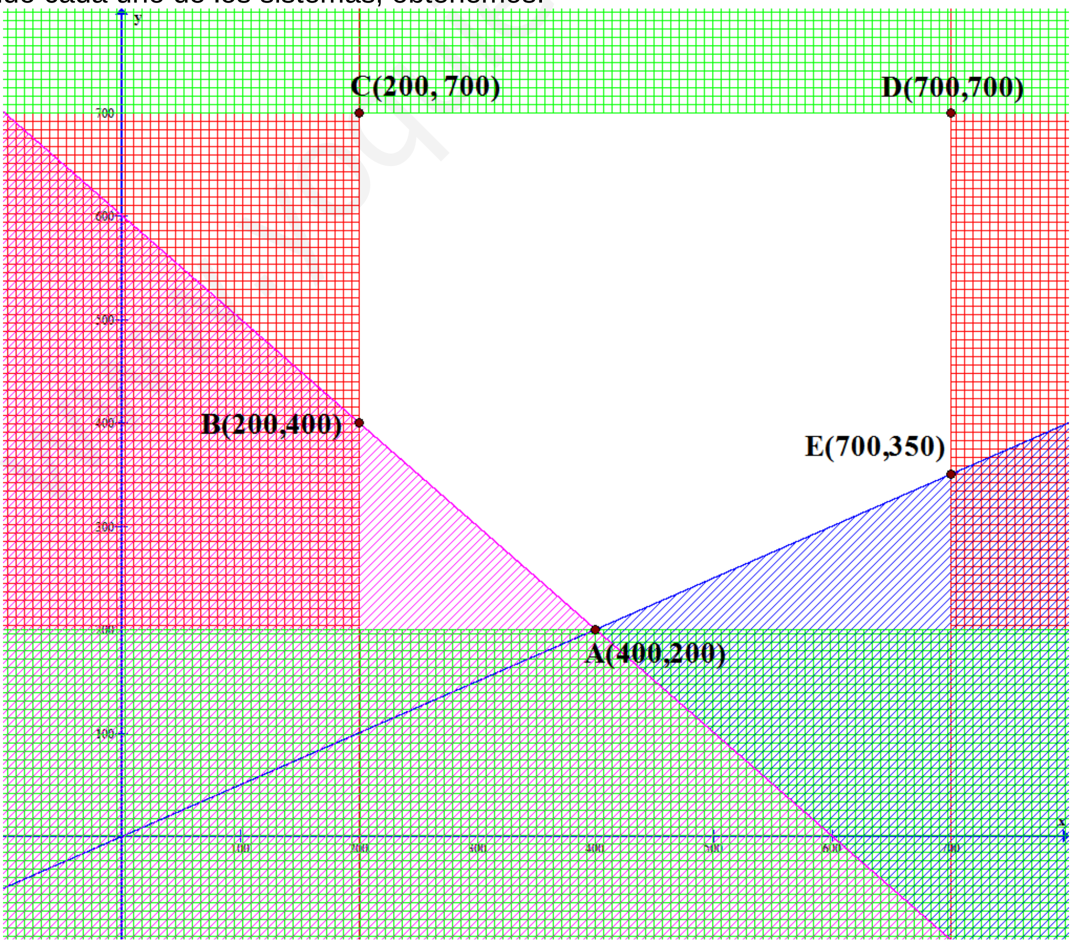
$$x = 2y \rightarrow y = \frac{x}{2}$$

x	$y = \frac{x}{2}$
200	100
600	300

Dibujando dichas rectas y rayando la parte del plano que no es solución, obtendremos un dibujo parecido al siguiente:



Determinemos los puntos candidatos a ser máximos para la función coste $C(x,y) = 2x+3y$.
Son los puntos de corte de las rectas que delimitan la región factible (de color blanco)
Resolviendo cada uno de los sistemas, obtenemos:



Valoremos la función objetivo $C(x,y) = 2x+3y$ en cada uno de estos puntos y decidimos cual tiene el mínimo coste.

$$A(400,200) \to C(400,200) = 800+600 = 1400 \text{ €}$$
$$B(200,400) \to C(200,400) = 400+1200 = 1600 \text{ €}$$
$$C(400,200) \to C(200,700) = 400+2100 = 2500 \text{ €}$$
$$D(700,700) \to C(700,700) = 1400+2100 = 3500 \text{ €}$$
$$E(700,350) \to C(700,350) = 1400+1050 = 2450 \text{ €}$$

El coste mínimo es para el punto A (400, 200) que significa un pedido de 400 metros al distribuidor A y 200 metros al distribuidor B. Dicho coste mínimo es de 1400 €

CUESTIÓN B2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 7x^2 + a$ y $g(x) = \sqrt{2x-1} + bx$ donde *a* y *b* son números reales, hallar *a* y *b* sabiendo que $f(1) = g(1)$ y $f'(1) = g'(1)$. (2,5 puntos)

Aplicando la condición $f(1) = g(1)$ obtendremos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 7\cdot1^2 + a = 1 - 7 + a = a - 6 \\ g(1) = \sqrt{2\cdot1-1} + b\cdot1 = \sqrt{1} + b = b+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a - 6 = b + 1 \Rightarrow a = b + 7$$

Aplicando la condición $f'(1) = g'(1)$ obtendremos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 7x^2 + a \to f'(x) = 3x^2 - 14x \to f'(1) = 3 - 14 = -11 \\ g(x) = \sqrt{2x-1} + bx \to g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 + \mathrm{b} \to g'(1) = \dfrac{2}{2\sqrt{2-1}} + \mathrm{b} = 1 + \mathrm{b} \to \end{array}\right\} \Rightarrow -11 = 1 + b \Rightarrow b = -12$$

Juntando las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a = b + 7 \\ b = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -12 + 7 = -5$$

Obtenemos un valor para a = – 5 y para b = – 12

CUESTIÓN B3. Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, la recta $y = x - 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)

La función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ es una parábola, la dibujamos hallando su vértice y algunos puntos de la misma.

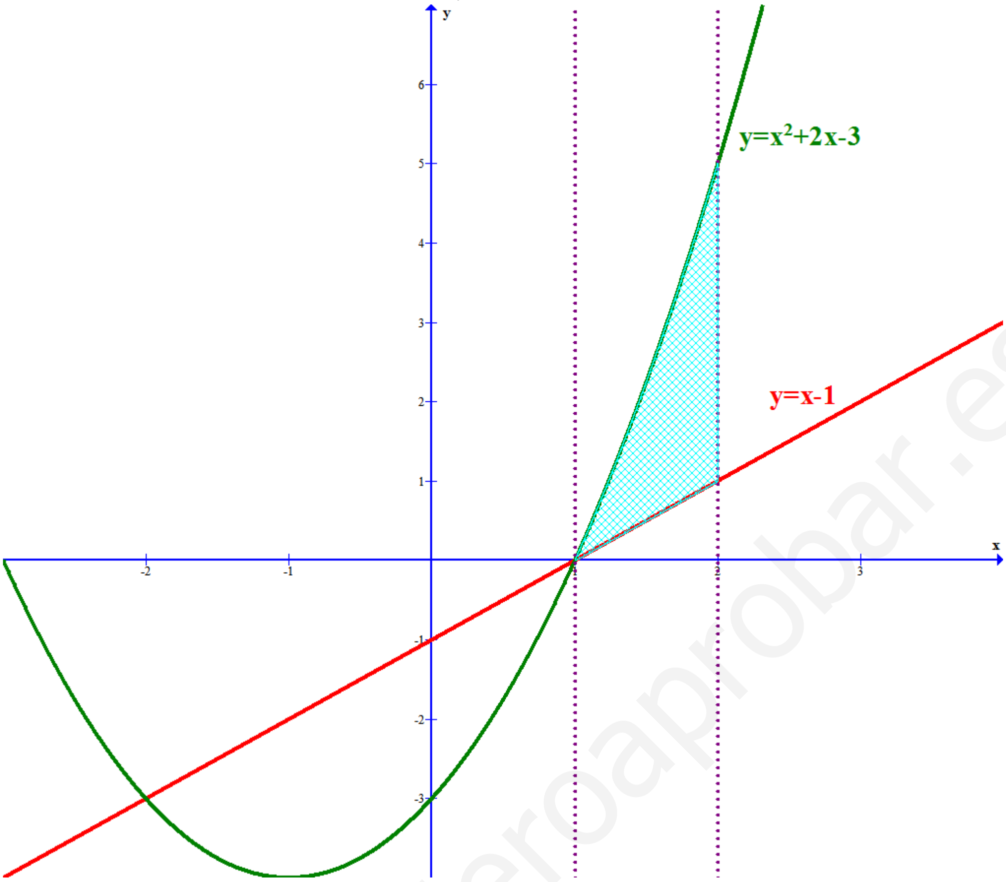
$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 + 2x - 3 \to f'(x) = 2x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

El vértice está en el punto del plano V(-1, -4)
Construyamos la tabla de valores

x	$y = x^2 + 2x - 3$
-1	$(-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$
0	$0^2 + 2\cdot0 - 3 = -3$
1	$1^2 + 2\cdot1 - 3 = 0$
-2	$(-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$
-3	$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

Y la recta $y = x - 1$ su tabla de valores es:

x	$y=x-1$
1	0
2	1



El área de esa región azul limitada por la parábola (color verde) y la recta (color rojo) entre las líneas de puntos x=1 y x=2 se obtiene con la integral definida:

$$Área=\int_1^2 (x^2+2x-3)-(x-1)\,dx=\int_1^2 x^2+2x-3-x+1dx=$$

$$=\int_1^2 x^2+x-2dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-2\right)=$$

$$=\frac{8}{3}+2-4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{11}{6}u^2=1'83\,u^2}$$

CUESTIÓN B4. En una población se ha determinado que cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A. (1,75 puntos)

La marca C la consumen 100 – (30 + 25) = 45 consumidores de agua mineral.
Calculemos cuantos consumidores de cada marca son mujeres:

$30\%\ de\ 30 = \frac{30 \cdot 30}{100} = 9$ mujeres consumen la marca A

$20\%\ de\ 25 = \frac{20 \cdot 25}{100} = 5$ mujeres consumen la marca B

$40\%\ de\ 45 = \frac{40 \cdot 45}{100} = 18$ mujeres consumen la marca C

En total, de cada 100 consumidores de agua mineral 9 + 5 + 18 = 32 son mujeres. Y de todas las mujeres consumidoras de agua mineral 9 consumen la marca A.

$$P(\text{consumir la marca A sabiendo que es mujer}) = \frac{9}{32} = \boxed{0'28}$$

CUESTIÓN B5. La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99%. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para que el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas. (1,25 puntos)

Como el error sigue la fórmula:

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Los datos proporcionados son $\sigma = 120$

Y que $1 - \alpha = 0'99 \rightarrow \alpha = 0'01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2'575$

La fórmula del error queda:

$$E = 2'575 \cdot \frac{120}{\sqrt{n}} = \frac{309}{\sqrt{n}}$$

Como el error debe ser menor de 25 horas tenemos la inecuación:

$$E = \frac{309}{\sqrt{n}} < 25$$

$$309 < 25 \cdot \sqrt{n}$$

$$\frac{309}{25} < \sqrt{n}$$

$$\left(\frac{309}{25}\right)^2 < n$$

$$152'76 < n$$

El tamaño mínimo de la muestra para tener un error menor de 25 horas es 153 bombillas