6.2. Junio 2015

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

  a) Calcular $B^t + 2C\cdot$.

  b) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $AX = B^t + 2C$

  selcs Jun 2015 Solución:

  a) $B^t + 2C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

  b) $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 0 & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

  Igualando los elementos: $\begin{cases} 2a-c=3 \\ 2b-d=2 \\ -a=2 \\ -b=-5 \end{cases}$ que tiene como soluciones $a=-2, \quad b=5, \quad c=-7, \quad d=8$

  $X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la funcion $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$, calcular:

  a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  b) Los maximos y minimos relativos.

  c) Los puntos de corte con los ejes.

  selcs Jun 2015 Solución:

- CUESTIÓN A3.

  Hallar una primitiva $F(x)$ de la funcion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ que cumpla que $F(1) = 0$

  selcs Jun 2015 Solución:

  $\displaystyle\int (x^3 - 2x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

  $F(1) = 0; \quad \dfrac{1}{4} - 2\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - 2 + C = 0; \quad C = \dfrac{23}{12}$

  $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{23}{12}$

- CUESTIÓN A4.

La probabilidad de aprobar la asignatura A es $2/3$ y la de aprobar la asignatura B es $1/2$. Además, la probabilidad de aprobar las dos es $1/4$.

a) Hallar la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas.

b) Calcular la probabilidad de aprobar A, pero no B.

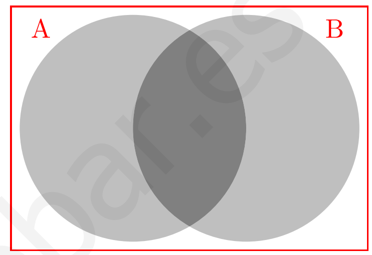
selcs Jun 2015 Solución:

Piden a) $p(A^c \cap B^c) = 1 - p(A \cup B)$

como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{12}$

resulta: $p(A^c \cap B^c) = 1 - \dfrac{11}{12} = \dfrac{1}{12}$

b) $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12}$



- CUESTIÓN A5.

Un estudio sociológico afirma que la proporción de estudiantes de una población es $2/5$. Si en una muestra aleatoria de 700 individuos de la población hay 100 estudiantes, ¿puede admitirse a un nivel de confianza del 99 % la afirmación del estudio?

selcs Jun 2015 Solución:

Contrastamos $H_0 : p = 2/5 = 0'4$ frente a $H_1 : p \neq 0'4$.

El tamaño muestral es $n = 700$.

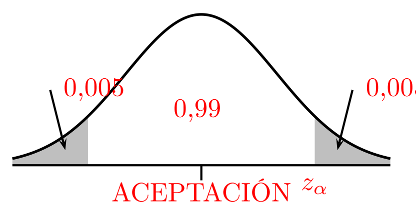
El nivel de significación $\alpha = 0,01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$.

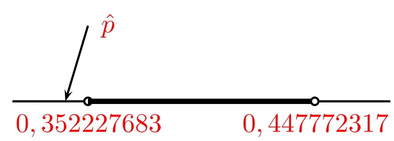
Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremos:

$p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = 0,4 \pm 2,58 \cdot \sqrt{\dfrac{0,4(1-0,4)}{700}} = 0,4 \pm 0,048 \begin{cases} 0,352227683 \\ 0,447772317 \end{cases}$

El intervalo de aceptación es $(0,352227683; 0,447772317)$

Como $\hat{p} = 100/700 = 0,1428$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0





- CUESTIÓN B1.

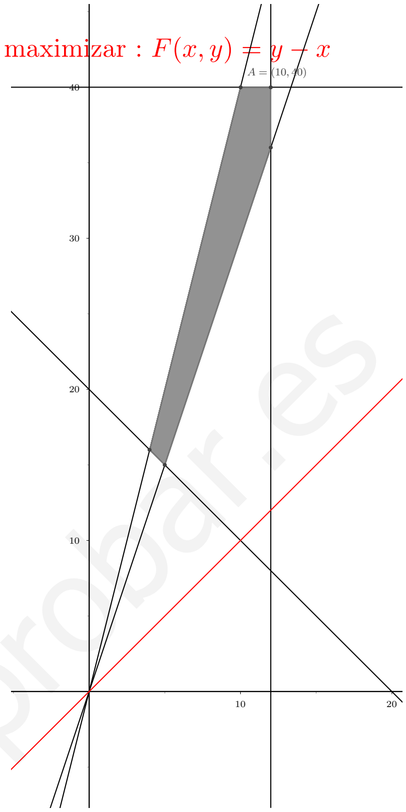
En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor?

selcs Jun 2015 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de máquinas expendedoras de bebidas calientes,

$y = n^0$ de máquinas expendedoras de bebidas calientes. Hay que maximizar : $F(x, y) = y - x$



$x + y \geq 20$

x	0	20
y	20	0

$x \leq 12 \quad y \leq 40$

$x \leq \dfrac{y}{3}$

x	0	10
y	0	30

$x \geq \dfrac{x + y}{5}$

x	0	10
y	0	40

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0 \quad y - x = 0$

x	0	20
y	0	20

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección $(10, 40)$

Luego para obtener la mayor diferencia habrá que poner 10 máquinas expendedoras de bebidas calientes y 40 de máquinas expendedoras de bebidas frías

La mayor diferencia será entonces: $F(10, 40) = 40 - 10 = 30$.

- CUESTIÓN B2.

Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$, donde a , b y c son numeros reales, hallar los valores de a , b y c para que la función cumpla las siguientes condiciones:

a) pase por el origen de coordenadas,

b) su derivada se anule en $x = 0$ y además

c) la pendiente de la tangente a su gráfica en $x = 1$ valga 2.

selcs Jun 2015 Solución:

Las condiciones se traducen en:

a) $f(0) = 0$; por tanto $c = 0$

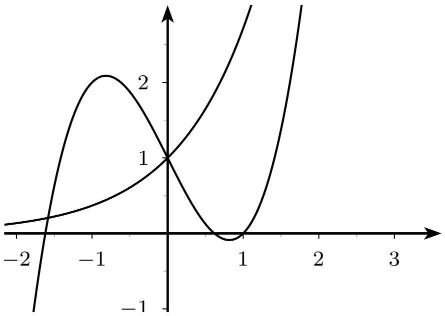
b) $f'(0) = 0$; $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$; luego $b = 0$

c) $f'(1) = 2$; $f'(2) = 4 \cdot 1^3 + 3a \cdot 1^2 = 2; \quad 4 + 3a = 2; \quad a = \dfrac{-2}{3}$

La función es $f(x) = x^4 - \dfrac{2}{3}\, x^3$

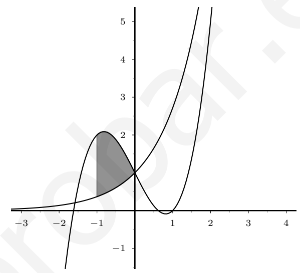
- CUESTIÓN B3.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y $g(x) = e^x$ cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura,



Hallar el area encerrada por las dos graficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.

selcs Jun 2015 Solución:



$$\int_{-1}^{0} (f - g)\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x + 1 - e^x)\, dx =$$

$$\left[\frac{4}{4} - x^2 + x - e^x\right]_{-1}^{0} = 0 - e^0 - (\frac{1}{4} - 1 - 1 - e^{-1}) =$$

$$-1 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{e} = \frac{3}{4} + \frac{1}{e} = 1'1178$$

- CUESTIÓN B4.

  Se lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

  a) Determinar el número de resultados de este experimento aleatorio.

  b) Sea A el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4" y B el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número par". Calcular la probabilidad de A y la de B.

  c) ¿Son A y B independientes?

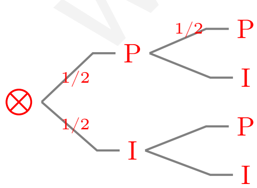
selcs Jun 2015 Solución:

a) El espacio muestral es $E = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2)\ldots(6,6)\}$ tiene 36 elementos equiprobables.

b)

$A = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$ luego $p(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Como B tiene muchos resultados consideramos salir par o impar al tirar el dado:



$p(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

c) Son independientes si se cumple que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$;

$A \cap B = \{(6,6)\}; \quad p(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

$p(A) \cdot p(B) = \dfrac{4}{36} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{36}$

Luego efectivamente A y B son independientes.

- CUESTIÓN B5.

  La altura de los edificios de una ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 m. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra aleatoria de dichos edificios para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 2 m, con un nivel de confianza del 97 %.

  selcs Jun 2015 Solución:

  Para el nivel de confianza del 97 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,1701$

  El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 97 % por $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 2 entonces

  $2,1701 \dfrac{20}{\sqrt{n}} \leq 2$

  Despejamos n: $\quad 2,1701 \dfrac{20}{\sqrt{n}} = 2, \quad \sqrt{n} = \dfrac{2,170090378 \cdot 20}{2} = 21,70090378; \quad n \geq 470,9292.$

  Así, pues, se tiene la confianza del 97 % de que el error de la estima será menor de 2 solamente si n es 471 o mayor.