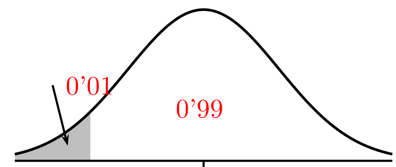
Contrastamos $H_0 : \mu = 160$ frente a $H_1 : \mu < 160$,
En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 160 - 2'33 \dfrac{20}{\sqrt{120}} = 155'74$.
que da el intervalo $(155'74, \infty)$.
Como $\bar{x} = 158$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que la media del nivel de colesterol siga igual $\mu = 160$, cabe pensar que la dieta no ha sido efectiva.



9.2. Junio 2012

- CUESTIÓN A1.

María y Luis han realizado un desplazamiento en coche que ha durado 13 horas y durante el cual, un tiempo ha conducido María, otro ha conducido Luis y el resto han descansado. Luis ha conducido 2 horas más de las que han descansado, y el total de horas de descanso junto con las de conducción de Luis es 1 hora menos que las que ha conducido María. Encontrar el número de horas que ha conducido cada uno y las que han descansado.

selcs Jun 2012 Solución:

Sea:

x tiempo que conduce María

y tiempo que conduce Luis

z tiempo que descansan

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ y=z+2 \\ z+y=x-1 \end{array}\right. \quad \text{reordenado:} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ y-z=2 \\ x-y-z=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} 3^a - 1^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{pmatrix} 3^a + 2^a \cdot 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ y-z=2 \\ -4z=-8 \end{array}\right.$ sustituyendo hacia arriba resulta:

$x = 7, y = 4, z = 2$

- CUESTIÓN A2.

Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x+1 & \text{si} & x < -1 \\ x-1 & \text{si} & -1 \leq x < 2 \\ ax^2 - 6ax + 5 & \text{si} & 2 \leq x \end{array}\right.$$

a) Estudiar la continuidad en $x = -1$.

b) Hallar a para que la función sea continua en $x = 2$.

c) Para $a = 1$ hacer una representación gráfica de la función.

selcs Jun 2012 Solución: a) Estudiamos los límites laterales en $x = -1$:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (3x + 1) = -2$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 1) = -2$

además $f(-1) = -2$

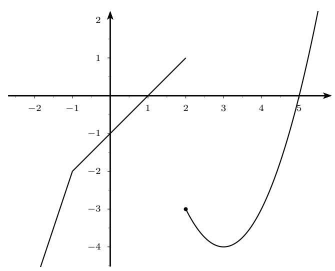
Por tanto la función es continua en $x = -1$.

b) Estudiamos los límites laterales en $x = 2$:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x - 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (ax^2 - 6ax + 5) = 4a - 12a + 5 = -8a + 5$

Para que sea continua han de coincidir por tanto $-8a + 5 = 1, \quad a = \dfrac{1}{2}$

c) 

- CUESTIÓN A3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2}{x - 1}$

  b) $g(x) = (1 - x)^2 e^x$

  c) $h(x) = \ln(2x^2 + 2)$

  selcs Jun 2012 Solución:

  a) $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 5x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

  b) $g'(x) = e^x(x^2 - 1)$

  c) $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

- CUESTIÓN A4.

  La probabilidad de que cuando un autobús llegue a un determinado semáforo lo encuentre en rojo es $0,2$. Si pasa tres veces a lo largo de un día por el semáforo, calcular la probabilidad de que:

  a) Las tres veces lo encuentre en rojo.

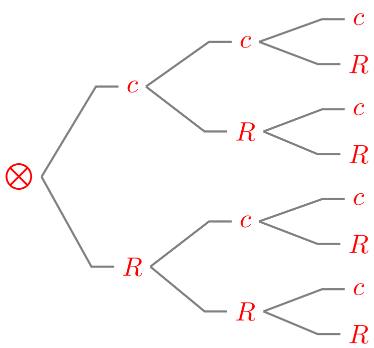
  b) Lo encuentre en rojo solo la segunda vez.

  c) Esté en rojo dos de las veces.

d) Lo encuentre en rojo al menos una vez.

selcs Jun 2012 Solución:

Sea R encontrarlo en rojo:



a) $p($ tres en rojo$) = 0'2^3 = 0'008$

b) $p($ solo segunda en rojo$) = 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0,8 = 0'128$

c) $p($ dos veces en rojo$) = 0'2{\cdot}0'2{\cdot}0'8+0'2{\cdot}0'8{\cdot}0'2+0'8{\cdot}0'2{\cdot}0'2 = 0'096$

d) $p($ al menos una vez rojo$) = 1 - p($ ninguna en rojo$) = 1 - 0'8^3 = 0'488$

- CUESTIÓN A5.

La puntuación de un test psicotécnico para una determinada población sigue una Normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una puntuación media de 25 puntos. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es $(24'02, 25'98)$, hallar el valor de σ.

selcs Jun 2012 Solución:

El intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x}$ es el centro del intervalo, por tanto en nuestro caso $\bar{x}\dfrac{24'02 + 25'98}{2} = 25$

Para el nivel de significación 0'05, corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Sustituyendo en el extremos superior: $\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25'98$

$25 + 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} = 25'98$

$25 + 1'96 \dfrac{\sigma}{10} = 25'98; \quad 1'96 \dfrac{\sigma}{10} = 0'98; \quad \sigma = \dfrac{9'8}{1'96} = 5$

- CUESTIÓN B1.

Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ 2x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones.

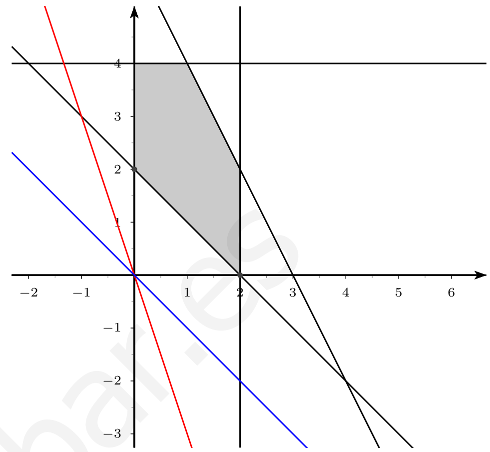
b) Considerar la función $f(xy) = 3x + y$. Calcular, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función en la región definida por el sistema.

c) Considerar la función $g(x,y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función en la región definida por el sistema.

selcs Jun 2012 Solución:

Representamos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array} \\ 2x + y \leq 6 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array} \end{cases}$$



b) Ahora la función f igualada a 0:

$f(x, y) = 3x + y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$

Vemos que el mínimo se da en el punto: $(0, 2)$

c) Ahora la función g igualada a 0:

$g(x, y) = 3x + 3y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

Vemos que el mínimo se da en el segmento de extremos: $(0, 2), (2, 0)$

- CUESTIÓN B2.

Una panadería ha comprobado que el número de panes de un determinado tipo que vende semanalmente depende de su precio x en euros según la función $f(x) = 4500 - 1500x$, donde $f(x)$ es el número de panes vendidos cada semana y x el precio por unidad de pan. Calcular:

a) La función $l(x)$ que expresa los ingresos semanales por la venta de ese tipo de pan en función del precio por unidad de pan, x .

b) El precio al que hay que vender cada pan para que dichos ingresos semanales sean máximos. ¿A cuánto ascenderán los ingresos semanales máximos?.

selcs Jun 2012 Solución:

a) $l(x) = x \cdot (4500 - 1500x) = 4500x - 1500x^2$

b) Derivando e igualando a 0: $l'(x) = 4500 - 3000x = 0, \quad x = \dfrac{4500}{3000} = 1'5$ €

Los ingresos serán: $l(1'5) = 4500 \cdot 1'5 - 1500 \cdot 1'5^2 = 3375$ €

- CUESTIÓN B3.

Hallar el área delimitada por la parábola $y = 2x^2 - 2x - 4$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$, y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

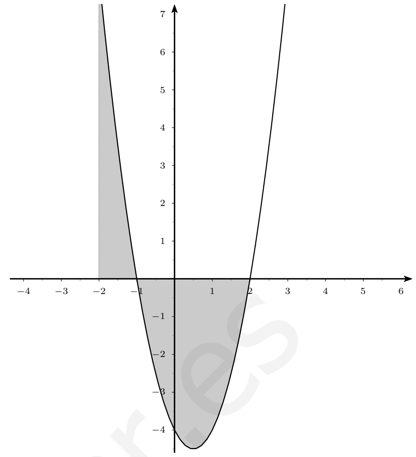
selcs Jun 2012 Solución:

$y = 2x^2 - 2x - 4$

$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 2x - 4)dx = \left[\frac{2\,x^3}{3} - x^2 - 4\,x \right]_{-2}^{-1} = \frac{11}{3}$

$S_2 = \int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)dx = \left[\frac{2\,x^3}{3} - x^2 - 4\,x \right]_{-1}^{2} = -9$

Área total $S = \frac{11}{3} + 9 = \frac{38}{3} = 12'66$ u^2



- CUESTIÓN B4.

La probabilidad de que un alumno apruebe la asignatura A es $\frac{1}{2}$, la de que apruebe la asignatura B es $\frac{3}{8}$ y la de que no apruebe ninguna de las dos es $\frac{1}{4}$

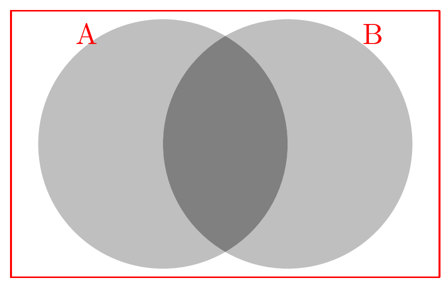
a) Calcular la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.

b) Calcular la probabilidad de que apruebe las dos asignaturas.

c) Hallar la probabilidad de que apruebe la asignatura A, sabiendo que ha aprobado la B.

selcs Jun 2012 Solución:

a) $p(A \cup B) = p(\text{aprobar al menos una}) = 1 - p(\text{no aprobar ninguna}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



b) $p(A \cup B) == p(A) + p(B) - p(A \cap B);\quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - p(A \cap B)$

despejando $p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

c) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$

- CUESTIÓN B5.

Hace 10 años, el 65 % de los habitantes de cierta Comunidad Autónoma estaba en contra de la instalación de una central nuclear. Recientemente, se ha realizado una encuesta a 300 habitantes y 190 se mostraron contrarios a la instalación. Con estos datos y con un nivel de significación de 0,01 ¿se puede afirmar que la proporción de contrarios a la central sigue siendo la misma?

selcs Jun 2012 Solución:

$H_0 : p = 0'65$

$H_1 : p \neq 0'65$

Se elige un **ensayo bilateral**.

Para el nivel de significación $0'01$, se corresponde con $z_\alpha = 2'58$.

El intervalo de aceptación tiene como extremos:

$$p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = p \pm 2'58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0'65 \pm \sqrt{\frac{0'65 \cdot 0'35}{300}} = 0'65 \pm 0'0275 = \begin{cases} = 0'6225 \\ = 0'6775 \end{cases}$$

La proporción muestral $\frac{190}{300} = 0'6333$ queda dentro, se acepta la hipótesis de que la proporción de contrarios a la central no ha variado.