10.2. Junio 2011

- CUESTIÓN A1.

Discutir el siguiente sistema en función del parámetro λ y resolverlo para $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \lambda x+2y=\lambda \\ 2x+\lambda y+4z=-1 \end{cases}$$

selcs Jun 2011 Solución:

a) Triangulemos la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 & \lambda \\ 2 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 2^a\text{fila} - 1^a \cdot \lambda \\ 3^a\text{fila} - 1^a \cdot 2 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \{3^a\text{fila} + 2^a\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

queda el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ (2-\lambda)y-\lambda z=0 \\ (2-\lambda)z=-3 \end{cases}$ y resulta de la última ecuación:

$z = \dfrac{-3}{2-\lambda}$ que es válida para $\lambda \neq 2$ y sustituyendo en la anterior da:

$(2-\lambda)y = \lambda z = \lambda\dfrac{-3}{2-\lambda}$; $\quad y = \dfrac{-3\lambda}{(2-\lambda)^2}$ = que es válida para $\lambda \neq 2$

y sustituyendo por fin en la primera:

$x = 1-y-z = 1 - \dfrac{-3\lambda}{(2-\lambda)^2} - \dfrac{-3}{2-\lambda}$ que es válida también para $\lambda \neq 2$

Para $\lambda = 2$ después de la triangulación resultaría el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2z=0 \\ 0z=-3 \end{cases}$ que muestra por la última ecuación que es incompatible.

En conclusión:

Para $\lambda \neq 2$ Sistema compatible determinado solución única.

Para $\lambda = 2$ Sistema incompatible no tiene solución.

La discusión es más simple si consideramos que puede ser un sistema tipo Cramer:

Hacemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$$

Para $\lambda \neq 2$ no se anula el determinante de la matriz de coeficientes luego el sistema es tipo Cramer con solución única.

Para $\lambda = 2$ sustituyendo queda el sistema que triangulando hemos visto que resulta incompatible.

b) Para $\lambda = 1$ el sistema es:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y=1 \\ 2x+y+4z=-1 \end{cases}$ Vamos a buscar la solución independientemente del primer apartado:

Triangulemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 2^a\text{fila} - 1^a \\ 3^a\text{fila} - 1^a \cdot 2 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \{3^a\text{fila} + 2^a\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

El sistema queda: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=0 \\ z=-3 \end{cases}$ La soluciones son $z=-3, y=-3, x=1+3+3=7$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$ calcular:

  a) El dominio de definición.

  b) Las asíntotas.

  selcs Jun 2011 Solución:

  a) Es una función racional, estará definida para todo x que no anule el denominador.

  $x^2-x-6=0$, tiene como soluciones $x=-2, x=3$

  Dominio $R-\{-2,3\}$

  b) Asíntotas verticales: la función se irá a infinito cuando se anule solo el denominador:

  Estudiemos los límites laterales

  Para $x=-2$

  $$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{4}{0^+} = \infty$$

  $$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

  Para $x=3$

  $$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

  $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{9}{0^+} = \infty$$

  Asíntota horizontal, $y=n:\quad n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, como es una racional sirve para los dos lados:

  $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$ Dividiendo numerador y denominador por x^2, resulta: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}} = 1$

  La asíntota horizontal es $y=1$

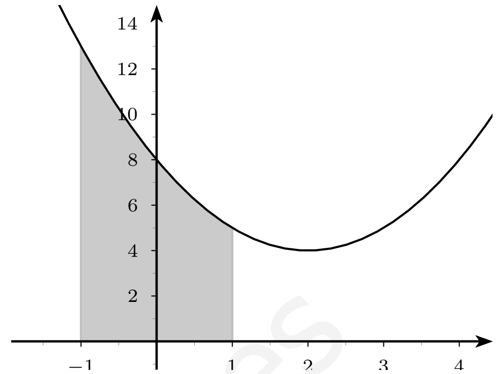
- CUESTIÓN A3.

  Calcular el area comprendida entre la curva $y=x^2-4x+8$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2011 Solución:

La parábola tiene el mínimo en $2x-4=0, \quad x=2, \quad f(2)=4$ y corta al eje OY en $y=8$

Área$= \displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-4x+8)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+8x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}-2+8-$ $(\displaystyle\frac{-1}{3}-2-8)=\frac{2}{3}+16=\frac{50}{3}=16'6666$ u^2



- CUESTIÓN A4.

Juan y Andrés juegan en común una quiniela cada semana. Juan la rellena el 40 % de las semanas y el resto de las semanas la rellena Andrés. El porcentaje de veces que la quiniela de Juan tiene algún premio es el 5 % y el de la que rellena Andrés es el 8 %.

a) Calcular la probabilidad de que una semana, elegida al azar, la quiniela tenga algún premio.

b) Si cierta semana la quiniela ha obtenido algún premio, calcular la probabilidad de que la haya rellenado Juan.

selcs Jun 2011 Solución:

Llamamos P al suceso ”tener premio”.

Llamamos J al suceso ”quiniela rellenada por Juan ”; $p(J)=0'40; \quad p(P/J)=0'05$

Llamamos A al suceso ”quiniela rellenada por Andrés ”; $p(A)=0'60; \quad p(P/A)=0'08$

$\{J, A\}$ forman sistema completo de sucesos.

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$p(P)=p(P/J)\cdot p(J)+p(P/A)\cdot p(A)=0'40\cdot 0'05+0'60\cdot 0'08=0'068$

b) Por el teorema de Bayes:

$$p(J/P)=\frac{p(P/J)\cdot p(J)}{p(P/J)\cdot p(J)+p(P/A)}=\frac{0'40\cdot 0'05}{0'40\cdot 0'05+0'60\cdot 0'08}=0'75=\frac{0'02}{0'068}=0'2941$$

- CUESTIÓN A5.

Se sabe que el tiempo diario que los jóvenes dedican a actividades con el ordenador sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos. Para una muestra aleatoria simple de 225 jóvenes se ha obtenido un tiempo medio de 100 minutos al día. Dar un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo diario medio dedicado al ordenador de todos los jóvenes.

selcs Jun 2011 Solución:

Los datos son: $\bar{x}=100, \sigma=15, n=225$.

Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}=1'65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\displaystyle\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=100\pm 1'65\cdot\frac{15}{\sqrt{225}}=100\pm 1'65=\begin{cases}98'35\\101'65\end{cases}$

El intervalo de confianza para el tiempo diario medio dedicado al ordenador es $[98'35, 101'65]$

- CUESTIÓN B1.

Una cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden las naranjas a 1000 y 1500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para satisfacer su demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar como máximo al distribuidor A el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

selcs Jun 2011 Solución:

Sean:
$x =$ número de toneladas compradas a A
$y =$ número de toneladas compradas a B
Coste: $f(x, y) = x + 1'5y$ en miles de euros

$$\left.\begin{array}{l} 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x \leq 2y \end{array}\right\}$$

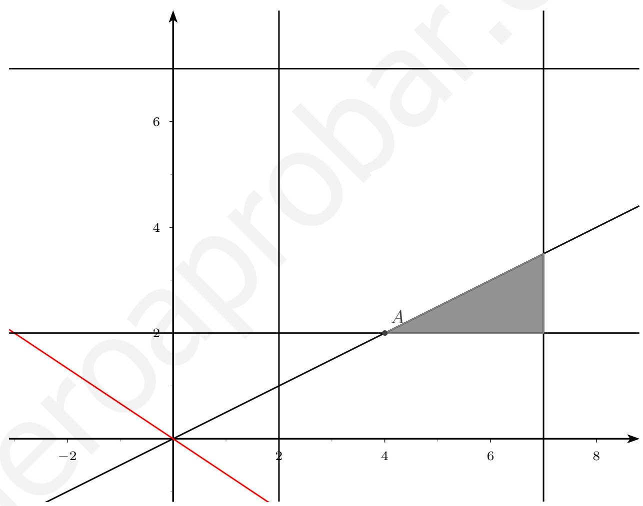
Representamos: $x \leq 2y$

x	0	4
y	0	2

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = x + 1'5y = 0$

x	0	-3
y	0	2



Para minimizar el coste tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A que sería la más cercana: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

$A(8, 4)$; $\quad f(4, 2) = 4 + 1'5 \cdot 2 = 7$

Por tanto el mínimo coste resulta de comprar 4 toneladas a A y 2 toneladas a B. El coste sería 7.000 € .

- CUESTIÓN B2.

Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$ calcular:

a) El dominio de definición.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Los máximos y los mínimos.

selcs Jun 2011 Solución:

a) Como es una función polinómica el dominio es todo R.

b) La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, estudiemos el crecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

x		-1		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

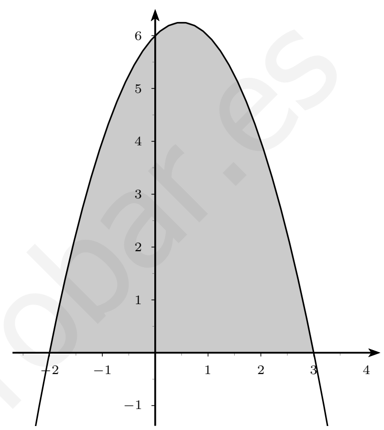
Sustituyendo: $f(-1) = 14$, $\quad f(3) = -18$.

La curva tiene un máximo en $(-1, 14)$ y un mínimo en $(3, -18)$

- CUESTIÓN B3.

  Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + x + 6$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2011 Solución:



Los punto de corte con OX de la parábola son $-x^2 + x + 6 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array} \right.$

Área$= \displaystyle\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{3} = -9 + \frac{9}{2} + 18 - (\frac{8}{3} + 2 - 12) = \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 19 = \frac{125}{6} = 20'83333 \text{ u}^2$

- CUESTIÓN B4.

  En una biblioteca hemos cogido un libro de la estantería de los libros de Historia, otro de la de Matemáticas y otro de la de Física. Si los devolvemos al azar a cada una de las estanterías, calcular la probabilidad de que al menos uno de los libros se coloque en la estantería que le corresponde.

  selcs Jun 2011 Solución:

Se correspondería con las ordenaciones de las cifras 1,2,3 en las que algún número conserva el orden natural.

Casos posibles $P_3 = 6$

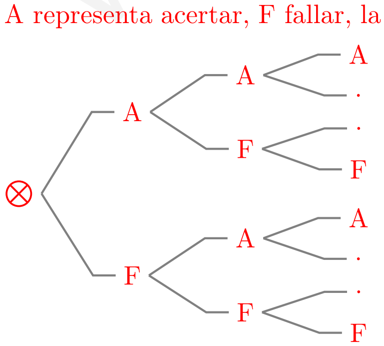
Casos favorables: 123,132,321,213 en total 4.

$p(\text{acertar al menos uno}) = 4/6 = 2/3$

Otro planteamiento:

Se correspondería con una urna con tres bolas numeradas de 1 a 3, se hacen tres extracciones sucesivas sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que coincida en número de la bola con el número de extracción?

A representa acertar, F fallar, la tercera extracción no tiene alternativas:



La probabilidad de la última trayectoria, que fallen las tres, es: $\frac{2}{3} . \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Por tanto la probabilidad de acertar al menos una vez es $p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

- CUESTIÓN B5.

Se sabe que la edad de los profesores de una Comunidad Autónoma sigue una distribución normal con varianza de 5 años. Una muestra aleatoria de 200 profesores de dicha Comunidad tiene una media de 45 años. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación del 0,05 que la edad media de todos los profesores de la Comunidad es de 46 años?

selcs Jun 2011 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 46$ frente a $H_1 : \mu \neq 46$,

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{5} = 2'23$

El nivel de confianza del 95 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 46 \pm 1'96 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{200}} = 46 \pm 0{,}3099 = \begin{cases} 45'6901 \\ 46'3099 \end{cases}$

que da el intervalo $(45'6901, 46'3099)$.

Como $\bar{x} = 45$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 46$ años., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre la media de las edades de la muestra y la media de las edades que se presuponía para los profesores de la Comunidad Autónoma .