11.2. Junio 2010

- CUESTIÓN A.1 En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa con 20 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 30.000 espectadores, mientras que otro programa con 10 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado período, la dirección de la red decide dedicar como máximo 80 min. de variedades y 6 min. de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

  selcs Jun 2010 Solución:

  Sean:
  x = número de veces que aparece el programa de 20 min. de variedades y un minuto de publicidad
  y = número de veces que aparece el programa de 10 min. de variedades y un minuto de publicidad
  Número de espectadores en miles: $f(x, y) = 30x+10y$

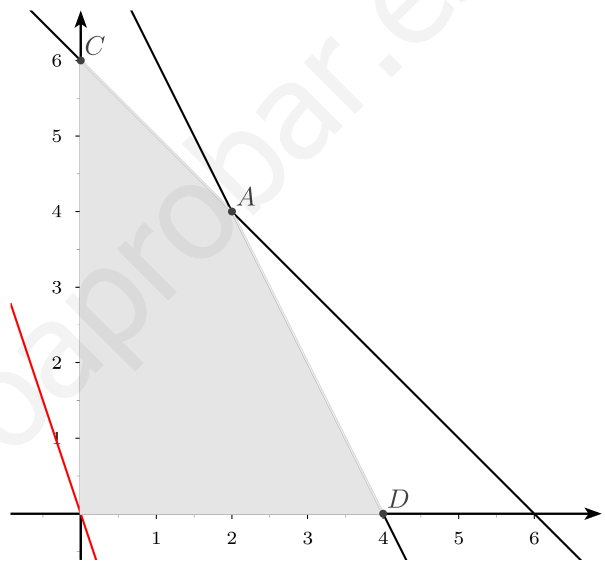
  $$\begin{cases} \text{variedades} & 20x + 10y \leq 80 \\ \text{publicidad} & x + y \leq 6 \end{cases}$$

  Representamos: $20x + 10y \leq 80$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array}$

  $x + y \leq 6$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array}$

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 30x + 10y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$

  Para maximizar el número de espectadores tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A o D que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

  $A(2, 4)$; $\quad f(2, 4) = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 100$

  $D(4, 0)$; $\quad f(4, 0) = 30 \cdot 4 + 6 \cdot 00 = 120$

  Por tanto el máximo número de espectadores se produce emitiendo 4 veces el programa de 20 min. de variedades y un minuto de publicidad y ninguna el otro.

- CUESTIÓN A.2 Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$ calcular:

  a) Dominio

  b) Asíntotas

  selcs Jun 2010 Solución:

  a) Dominio: Anulamos el denominador:

  $$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

  Por tanto: Dominio $= R - \{-3, 1\}$

  b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  - verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
    Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -3, x = 1$

- Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x^2+2x-3} = 0$
  Luego la asíntota horizontal es $y = 0$

Con el regionamiento podemos saber el lado por el que la curva se acerca a la asíntota:

Para ello consideramos las raíces del numerador y denominador: resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $\quad x = -3, x = 1, x = 2$

x		-3		1		2	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

- CUESTIÓN A.3 Calcular el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 + 2x - 16$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 4$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2010 Solución:

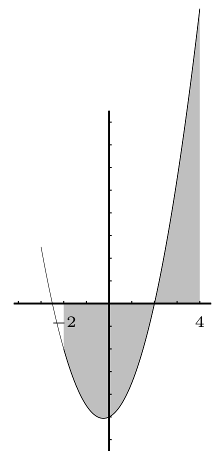
Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta: $\quad 3x^2 + 2x - 16 = 0;$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 16}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{-2+14}{6} = 2 \\ x_2 = \frac{-2-14}{6} = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$S_1 : \int_{-2}^{2} 3x^2 + 2x - 16dx = \left[x^3 + x^2 - 16\,x\right]_{-2}^{2} = -48u^2$$

$$S_2 = \int_{2}^{4} 3x^2 + 2x - 16dx = \left[x^3 + x^2 - 16\,x\right]_{2}^{4} = 36u^2$$

El área total encerrada es por tanto $84u^2$



- CUESTIÓN A.4 Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A, B y C. La cadena A fabrica el 50 % del total de coches producidos, la B el 25 % y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es: 1/2 en la cadena A, 1/4 en la cadena B y 1/6 en la cadena C. Calcular la probabilidad de que un coche elegido al azar sea defectuoso.

  selcs Jun 2010 Solución:

Llamamos D al suceso " ser defectuoso".

Llamamos A al suceso "coche fabricado en la cadena A"; $p(A) = \dfrac{50}{100}$

Llamamos B al suceso "coche fabricado en la cadena B" ; $p(A) = \dfrac{25}{100}$

Llamamos C al suceso "coche fabricado en la cadena C"; $p(A) = \dfrac{25}{100}$

$\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.

Por el Teorema de la probabilidad total

$$p(D) = p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + +(D/C) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{100} = \frac{17}{48} = 0'35416$$

- CUESTIÓN A.5 A una muestra aleatoria de 100 alumnos de segundo de bachillerato se les hizo una prueba de madurez, obteniendo una media muestral de 205 puntos. Suponiendo que la puntuación obtenida en la prueba de madurez es una variable aleatoria normal, ¿entre qué límites se encuentra la madurez media de los alumnos de segundo de bachillerato con un nivel de confianza de 0.99 si la varianza de la población es de 576?

  selcs Jun 2010 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 205, \sigma^2 = 576, n = 100$.

  Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

  $$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 205 \pm 2'58 \cdot \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{100}} = 205 \pm \frac{12}{5} = 205 + 6'192 \begin{cases} 198{,}808 \\ 211{,}192 \end{cases}$$

  El intervalo de confianza para la madurez media es $(202'6, 207'4)$

- CUESTIÓN B.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

  $$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -\lambda \\ 2x + 3y = \lambda \end{cases}$$

  a) Resolverlo para $\lambda = 3$

  b) Estudiarlo para cualquier valor de λ.

  selcs Jun 2010 Solución:

  a)

  Para $\lambda = 3$ resulta $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -3 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

  que tiene como matriz asociada:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  y triangulando por Gauss resulta:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z = -3, \quad y = -3, \quad x = 6$.

  b)

  Tiene como matriz asociada:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  y triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a - 1^a \\ 3^a + 1^a \times (-2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3 & -4 & \lambda \end{pmatrix} \; 3^a + 2^a \times (-3) \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -4 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

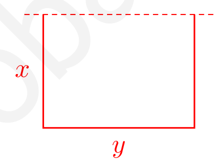
que sustituyendo hacia arriba da como soluciones:

$z = -\lambda, y = -\lambda, x = 2\lambda$ que sirve para cualquier valor de λ

- CUESTIÓN B.2 Un terrateniente posee unos terrenos al borde de un río. Allí desea cercar una parcela y montar una playa privada con todo tipo de servicios. Para ello dispone de 4000 metros de alambrada. ¿Cuál es la superficie máxima, de forma rectangular, que puede cercar y cuál la longitud de ribera apta para el baño?

  selcs Jun 2010 Solución:

  Superficie: $S = x \cdot y$ máxima
  Longitud: $2x + y = 4000$. Despejamos y:
  $y = 4000 - 2x$
  Sustituyendo en S: $S(x) = x(4000 - 2x) = 4000x - 2x^2$ máxima



  Ahora anulamos la derivada:

  $S'(x) = 4000 - 4x = 0; \quad x = 1000$

  Por las condiciones del enunciado la solución es 1000, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		1000	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

  la longitud de ribera apta para el baño es $y = 4000 - 2 \cdot 1000 = 2000$ m

  la superficie máxima rectangular que puede cercar es $S = 1000 \cdot 2000 = 2000000$ m^2

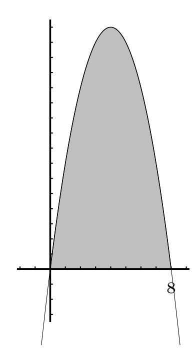
- CUESTIÓN B.3 Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 8x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2010 Solución:

  Para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta:
  $-x^2 + 8x = 0;$

  $$x(-x+8) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

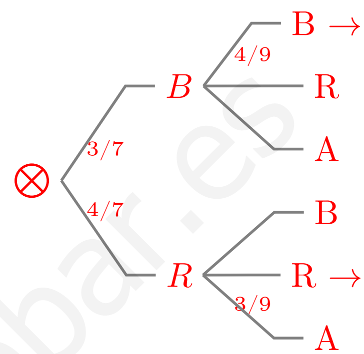
  $$S = \int_0^8 -x^2 + 8x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} \right]_0^8 = \frac{256}{3} u^2$$



- CUESTIÓN B.4 En un cajón de un armario, Juan guarda desordenadamente 3 pares de calcetines blancos y 4 pares de calcetines rojos; en otro cajón guarda 4 corbatas blancas, 3 rojas y 2 azules. Para vestirse saca al azar del primer cajón un par de calcetines y del segundo una corbata. Hallar la probabilidad de que los calcetines y la corbata sean del mismo color.

selcs Jun 2010 Solución: COMPROBAR

A partir del diagrama en árbol, sumando las probabilidades correspondientes a las dos ramas:
$p($ el mismo color$) = \frac{3}{7}.\frac{4}{9} + \frac{4}{7}.\frac{3}{9} = \frac{8}{21} = 0'38095$



- CUESTIÓN B.5 Se sabe que las calificaciones de los alumnos de segundo de bachiller en matemáticas es una variable aleatoria normal de media 5.5 y varianza 1.69. Se extrae una muestra aleatoria de 81 alumnos que cursan el bachiller bilingüe obteniéndose una media muestral de 6.8 puntos en las calificaciones de dichos alumnos en la asignatura de matemáticas. Se quiere decidir si existe una diferencia significativa entre la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos del bachiller bilingüe y la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos de segundo de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0'01$

selcs Jun 2010 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 5'5$ frente a $H_1 : \mu \neq 5'5$,

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{1'69} = 1'3$

El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5'5 \pm 2'58 \frac{1'3}{\sqrt{81}} = 5'5 \pm 0'3726 = \begin{cases} 5'8726 \\ 5'1274 \end{cases}$

que da el intervalo $(5'127, 5'872)$.

Como $\bar{x} = 6'8$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 5'5$ gr., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos del bachiller bilingüe y la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos de segundo de bachiller en general.