12.2. Junio 2009

- CUESTIÓN 1.A.

Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores de λ y resolverlo para el valor $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

selcs Jun 2009 Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Iniciamos Gauus triangulando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} \{2^a - 1^a; 3^a + 1^a \times (-2)\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 3 & 1-k \\ 0 & -1 & k+2 & -2k \end{pmatrix} \{3^a \times (-2) + 2^a\} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1-k \\ 0 & 0 & -2k-1 & 1+3k \end{pmatrix}$$

una vez triangulada volvemos a sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 3z = 1 - k \\ (-2k-1)z = 1 + 3k \end{cases} \text{ resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba}$$

$(-2k-1)z = 1 + 3k; \quad z = \dfrac{1+3k}{-2k-1}$ que solo no se puede efectuar si se anula el denominador, por tanto:

Si $k \neq \dfrac{-1}{2}$ el sistema tiene solución única, es compatible determinado

Si $k = \dfrac{-1}{2}$, el sistema no tiene solución, el sistema es incompatible.

Resolvemos para $k = 1$ $\quad \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y - 3z = 0 \\ -3z = 4 \end{cases}$

Luego $z = \dfrac{-4}{3}$ sustituyendo de abajo hacia arriba y despejando

$y = \dfrac{3z}{2} = \dfrac{3\frac{-4}{3}}{2} = -2; \quad x = 1 + y - z = 1 - 2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3}$

- CUESTIÓN 1.B.

Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 23 de vitamina C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2, que en cada bote contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	A	B	C
P_1	4	1	6
P_2	1	6	10

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 100 euros y el de un bote del producto P_2 es de 160 euros, averiguar:

a) ¿Como deben mezclarse ambos productos para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

b) ¿Que cantidad tomara de cada vitamina si decide gastar lo menos posible?

selcs Jun 2009 Solución:

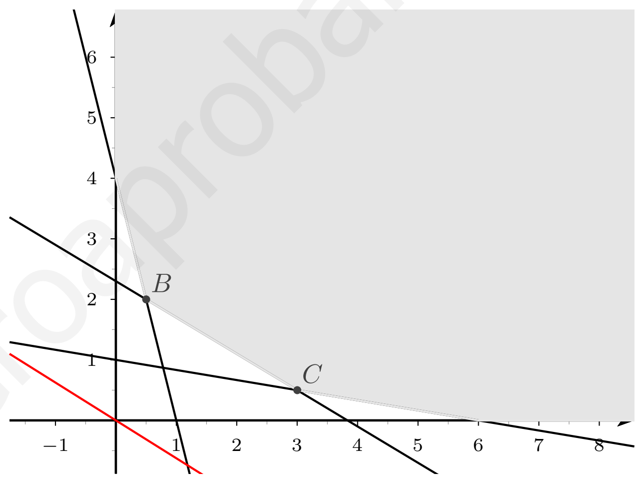
$x =$ número de botes del producto P_1

$y =$ número de botes del producto P_2

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + y \geq 4 \\ x + 6y \geq 6 \\ 6x + 10y \geq 23 \end{array}\right.$$

Coste: $f(x, y) = 100x + 160y$

Representamos:



$$\left\{\begin{array}{ll} 4x + y \geq 4 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array} \\ x + 6y \geq 6 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ 6x + 10y \geq 23 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3'8 \\ \hline y & 2'3 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 100x + 160y = 0 \qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1'6 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

Para minimizar hallamos y probamos los puntos B y C

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + y = 4 \\ 6x + 10y = 23 \end{array}\right. \qquad B = (0'5, 2) \quad f(0'5, 2) = 100 \cdot 0'5 + 160 \cdot 2 = 370$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 6y = 6 \\ 6x + 10y = 23 \end{array}\right. \qquad C = (3, 0'5) \quad f(3, 0'5) = 100 \cdot 3 + 160 \cdot 0'5 = 380$$

a) Por tanto para minimizar el coste debe mezclar medio bote de P_1con 2 botes de P_2.

b) Vitamina A: $0'5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 4$ unidades

Vitamina B: $0'5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 12'5$ unidades

Vitamina C: $0'5 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 23$ unidades

- CUESTIÓN 2.A.

La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 3 en el punto de abscisa $x = 2$. Hallar los valores de los parámetros p y q .

selcs Jun 2009 Solución:

Que la función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tenga un mínimo en el punto $(2, 3)$ se desdobla en dos condiciones:

Pasa por el punto $(2, 3)$ luego $f(2) = 3$ por tanto $2^3 + p \cdot 2 + q = 3, \quad 8 + 4p + q = 3 \quad 4p + q = -5$

La derivada $f'(x) = 3x^2 + 2px$ se anula en $x = 2$, luego $f'(2) = 0$, $\quad 12 + 4p = 0$ despejando $p = \dfrac{-12}{4} = -3$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $4(-3) + q = -5$, $\quad q = 7$

La función es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

- CUESTIÓN 2.B.

  Dada la curva $y = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2}$ calcular:

  a) El dominio.

  b) Las asíntotas.

  c) Hacer una representación gráfica de la misma.

  selcs Jun 2009 Solución:

  a) Dominio y regionamiento: $y = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2}$

  Anulamos el denominador:

  $x^2 + x - 2 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$

  Por tanto: Dominio $= R - \{1, -2\}$

  b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY : x = 0$, resulta $y = -\dfrac{1}{2}$

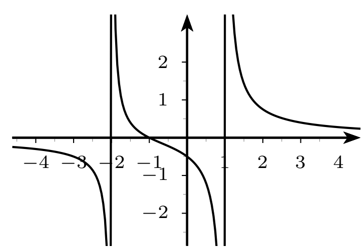
  con $OX : y = 0$, resulta $x + 1 = 0$, $\quad x = -1$

  c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

  Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 2$

  Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2} = 0; \quad y = 0$



  d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + x - 2)^2}$

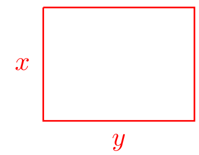
  Anulamos: $x^2 + 2x + 3 = 0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre creciente

- CUESTIÓN 3.A.

  Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3600 metros cuadrados de superficie para poderlo cercar con una valla de longitud minima.

  selcs Jun 2009 Solución:

Longitud: $L = 2x + 2y$ mínima
Área: $x \cdot y = 3600$. Despejamos y:
$y = \dfrac{3600}{x}$



Sustituyendo en L: $L(x) = 2x + 2\dfrac{3600}{x}$ mínima

Ahora anulamos la derivada:

$$L'(x) = 2 - 2\frac{3600}{x^2} = \frac{2x^2 - 2\cdot 3600}{x^2} = 0; \quad x^2 = 3600, \quad x = \pm 60$$

Por las condiciones del enunciado la solución es 60, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		60	
$L'(x)$	$-$		$+$
$L(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

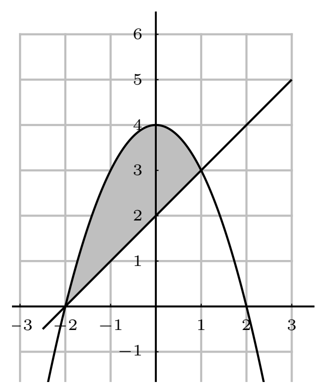
selcs Jun 2009 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

$4 - x^2 = x + 2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = 1, x = -2$

Área$= \displaystyle\int_{-2}^{1}$ parábola $-$recta $=$

$dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2) \quad dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera ingles o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cual es la probabilidad de que sea chica?

selcs Jun 2009 Solución:

Teorema de la Probabilidad Total

Sea I ser de Inglés,dicen que $p(I) = 0'9$, sea F ser de Francés, en consecuencia: $p(F) = 0'1$.

Sea V ser varón, y M ser mujer.

Como $p(V/I) = 0'3$ en consecuencia: $p(M/I) = 0'7$

Como $p(V/F) = 0'4$ en consecuencia: $p(M/F) = 0'6$

Entonces por el teorema mencionado:

$p(M) = p(M/I) \cdot p(I) + p(M/F) \cdot p(F) = 0'7 \cdot 0'9 + 0'6 \cdot 0'1 = 0'69$

- CUESTIÓN 4.B.

  Se estima que la probabilidad de que un jugador de balonmano marque un gol al lanzar un tiro de siete metros es del 75 %. Si en un partido le corresponde lanzar tres de estos tiros, calcular:

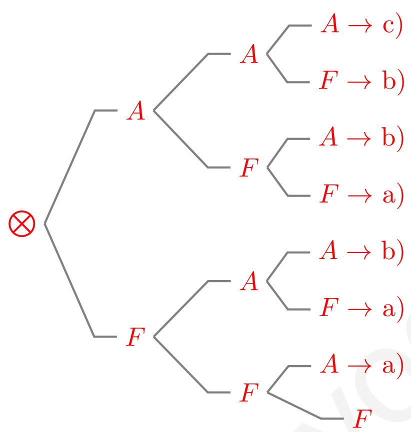
  a) la probabilidad de marcar un gol tras realizar los tres lanzamientos

  b) la probabilidad de marcar dos goles tras realizar los tres lanzamientos

  c) la probabilidad de marcar tres goles tras realizar los tres lanzamientos

  d) la probabilidad de marcar solo en el primer lanzamiento

  selcs Jun 2009 Solución:



a) Entendemos exactamente 1 acierto entre los tres lanzamientos: hay tres ramas que lo cumplen: $p($ un acierto $= 3 \cdot 0'75 \cdot 0'25^2 = 0'140625$

b) Entendemos exactamente 2 acierto entre los tres lanzamientos: hay tres ramas que lo cumplen: $p($ dos acierto $= 3 \cdot 0'75^2 \cdot 0'25 = 0'421875$

c) Es la primera rama: $p($ tres acierto $= 0'75^3 = 0'421875$

d) Es la rama $\otimes \quad A \to \quad F \to \quad F$, luego $p($ solo un acierto en el primero $= 0'75 \cdot 0'25^2 = 0'046875$

- CUESTIÓN 5.A.

  El numero de accidentes mortales en una ciudad es, en promedio, de doce mensuales. Tras una campaña de señalización y adecentamiento de las vías urbanas, se contabilizaron en seis meses sucesivos 8, 11, 9, 7, 10 y 9 accidentes mortales. Suponiendo que el numero de accidentes mortales en dicha ciudad tiene una distribución normal con una desviación típica igual a 1,3 ¿podemos afirmar que la campana fue efectiva con un nivel de significación de 0,01?

  selcs Jun 2009 Solución:

  Para test bilateral:

  El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 \pm 2'58 \dfrac{1'3}{\sqrt{6}} = 12 \pm 1'3692 = \begin{cases} 13'3692 \\ 10'6308 \end{cases}$

  que da el intervalo $(10'6308, 13'3692)$.

Como $\bar{x} = \frac{8+11+9+7+10+9}{6} = 9$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 12$, cabe pensar que la campaña ha sido efectiva.

Como debemos suponer que la campaña es para disminuir el número de accidentes, el test más adecuado sería el unilateral izquierdo;

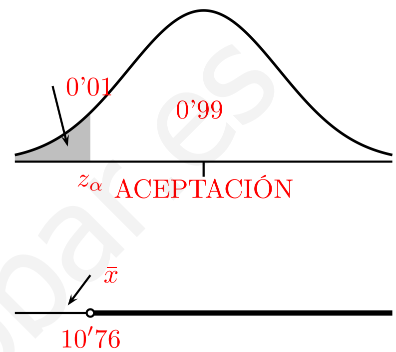
Contrastamos $H_0 : \mu = 12\,\%$ frente a $H_1 : \mu < 12\,\%$,

En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 - 2'33 \dfrac{1'3}{\sqrt{6}} = 12 - 1'2365 = 10'7635$.

que da el intervalo $(10'7635, \infty)$.

Como $\bar{x} = \frac{8+11+9+7+10+9}{6} = 9$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que la media de accidentes siga igual $\mu = 12$, cabe pensar que la campaña ha sido efectiva.



- CUESTIÓN 5.B.

Se sabe que el peso de los recién nacidos sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica igual a 0,75 kilogramos. Si en una muestra aleatoria simple de cien de ellos se obtiene una media muestral de 3 kilogramos, calcular un intervalo de confianza para la media poblacional que presente una confianza del 95 %.

selcs Jun 2009 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 3, \sigma = 0'75, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \pm 1'96 \cdot \dfrac{0'75}{\sqrt{100}} = 3 \pm 0'075 \begin{cases} 2'925 \\ 3'075 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(2'925, 3'075)$