13.2. Junio 2008

- CUESTIÓN 1.A.

Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

selcs Jun 2008 Solución:

Sea:

x el número de hombres

y el número de mujeres

z el número de niños

las condiciones se pueden expresar:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ -x+y=1 \end{array}\right.$$

Tiene como matriz asociada:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Que triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 40 \end{array}$$

que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=5, \quad y=7, \quad x=8$.

Hay por tanto 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

- CUESTIÓN 1.B.

Un taller de bisutería produce sortijas sencillas a 4,5 euros y sortijas adornadas a 6 euros. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sortijas sencillas, ni más de 300 adornadas, ni más de 500 en total.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se pueden vender? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Suponiendo que se vende toda la producción ¿cuántas unidades de cada clase interesará fabricar para obtener los máximos ingresos?

selcs Jun 2008 Solución:

Sean:
$x =$ número de sortijas sencillas
$y =$ número de sortijas adornadas
Ganancia: $f(x, y) = 4'5x + 6y$ euros

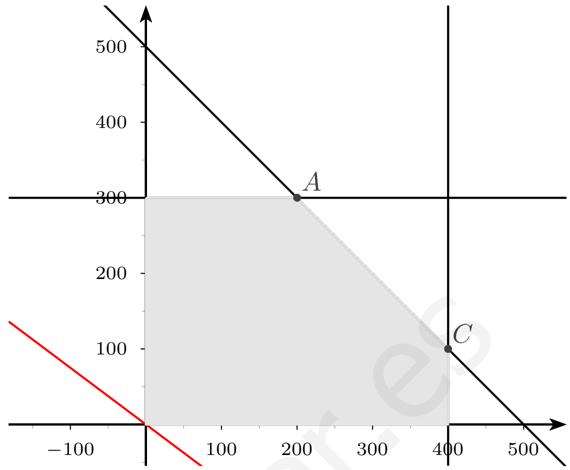
$$\begin{cases} x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x + y \geq 500 \end{cases}$$

Representamos: $x + y \geq 500$

x	0	500
y	500	0

Ahora la función igualada a 0:
$f(xy) = 4'5x + 6y = 0$

x	0	-60
y	0	45



Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A o C que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

$A(300, 200)$; $\quad f(300, 200) = 4'5 \cdot 300 + 6 \cdot 200 = 2550$

$C(400, 100)$; $\quad f(400, 100) = 4'5 \cdot 400 + 6 \cdot 100 = 2400$

Por tanto el máximo beneficio resulta de vender 300 sortijas sencillas y 200 sortijas adornadas.

- CUESTIÓN 2.A.

En una región, un río tiene la forma de la curva $y = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ y es cortada por un camino según el eje OX.

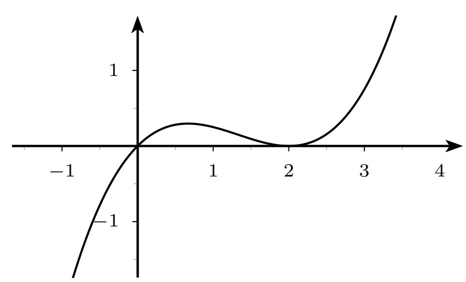
Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

selcs Junio 2008 Solución:
Se trata de una función polinómica por tanto para representarla veremos los puntos de corte y el crecimiento:

a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta $\dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x = 0$; $\quad x(\dfrac{1}{4}x^2 - x + 1) = 0$; $\quad x^2 - 4x + 4 = 0$; que da como solución $x = 2$ doble.



b) Crecimiento: Viene dado por el signo de la derivada, para ello anulamos la derivada:

$f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + 2x + 1 = 0$

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $2(x + 1) = 0$, $\quad x = -1$ pues $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2(x+1)} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2(x+1)} == 0$; $\quad y = 0$

- CUESTIÓN 2.B.

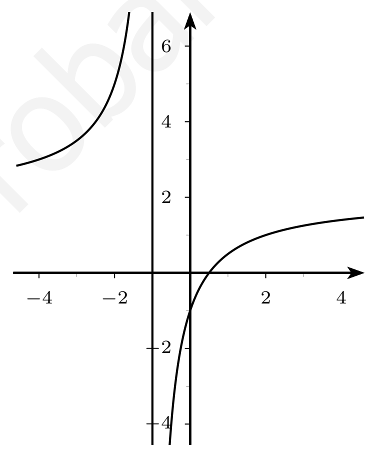
  Dada la curva $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

  a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

  b) Las asíntotas.

  c) Hacer una representación gráfica de la misma.

selcs Junio 2008 Solución:
Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:



a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{-1}{1} = 1$

con $OX : y = 0$, resulta $2x - 1 = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}$

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $x + 1 = 0, \quad x = -1$ pues $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x+1} = \pm\infty$

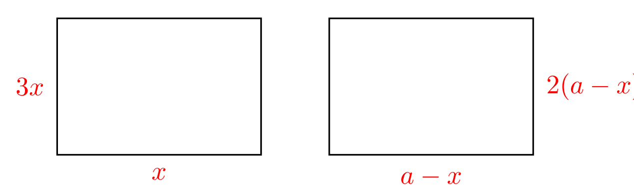
Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2; \quad y = 2$

- CUESTIÓN 3.A.

  Supongamos que tenemos un alambre de longitud a y lo queremos dividir en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es el doble de su base y en el otro su altura es el triple de su base. Determinar el punto por el cuál debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas de los dos rectángulos sea mínima.

selcs Junio 2008 Solución:

Suma de áreas: $f(x) = x \cdot 3x + (a - x)(2(a - x) = 3x^2 + 2a^2 + 2x^2 - 4ax = 5x^2 - 4ax + 2a^2$ mínima
Derivamos $f'(x) = 10x - 4a$. Anulamos la derivada $10x - 4a = 0$
Resulta $x = \dfrac{4a}{10} = \dfrac{2a}{5}$



x	$\frac{a}{5}$	$\frac{2a}{5}$	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

- CUESTIÓN 3.B.

  Calcular el área limitada por la curva $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0, x = 3$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Junio 2008 Solución:

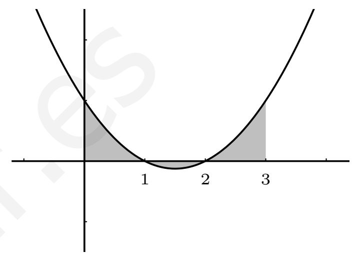
  $S = S_1 + S_2 + S_3$

  $S_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1 - 0 = \frac{5}{12}$

  $S_2 : \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{12}{4} + 2 - (\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1) = \frac{-1}{12} \quad S_1 = \frac{1}{12}$

  $S_3 = \displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{27}{4} + 3 - (\frac{8}{6} - \frac{12}{4} + 2) = \frac{5}{12}$

  $S = \dfrac{11}{12}\ u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

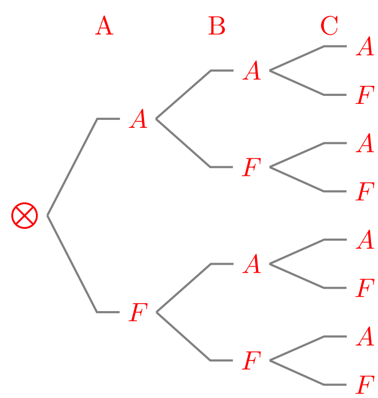
  Tres hombres A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance el objetivo son $\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{1}{3}$ respectivamente. Calcular:

  a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.

  b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.

  c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

  selcs Junio 2008 Solución:



  Representamos por A acertar, F fallar.

  a) $p($ "todos aciertan" $) = p(A_A A_B A_C) = \dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{72}$

  b) $p($"todos fallan"$) = p(F_A F_B F_C) = \dfrac{5}{6}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{12}$

  c) " al menos uno acierta" es el complementarios de "todos fallan" por tanto:

  $p($ " al menos uno acierta" $) = 1 - p($"todos fallan"$) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

- CUESTIÓN 4.B.

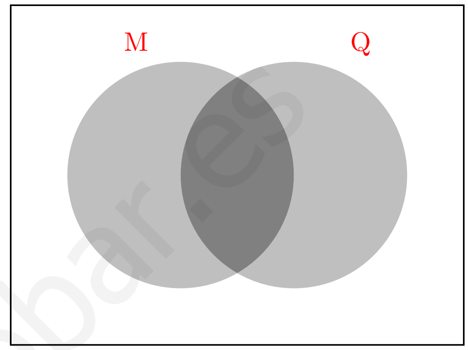
  En una cierta facultad se sabe que el 25 % de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15 % suspenden química y el 10 % suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.

  a) Calcular la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.

b) Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?

selcs Junio 2008 Solución:

Llamamos M al suceso "suspender M"; $p(M) = 0'25$
Llamamos Q al suceso "suspender Q"; $p(Q) = 0'15$
Suspender $p(M \cap Q) = 0'10$



a) " No suspenda química ni matemáticas" equivale a "aprobar las dos" que es el complementario de "suspender alguna" : $p(M^c \cap Q^c) = 1 - p(M \cup Q) =$
Calcula primero la probabilidad de la unión: $p(M \cup Q) = p(M) + p(Q) - p(M \cap Q) = 0'25 + 0'15 - 0'10 = 0'30$
Por tanto: $p($ " No suspenda química ni matemáticas" $) = 1 - 0'30 = 0'70$

b) Piden calcular la probabilidad de suspender matemáticas supuesto que ha suspendido química:
$p(M/Q) = \dfrac{p(M \cap Q)}{p(Q)} = \dfrac{0'10}{0'15} = 0'666$

- CUESTIÓN 5.A.

El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por cierta casa comercial es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0,978 kg. Suponiendo que la distribución del peso de los paquetes de café es normal y la desviación típica de la población es de 0,10 kg. ¿Es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ con un nivel de significación de 0,05 ? ¿Y con un nivel de significación de 0,01?

selcs Junio 2008 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 1000$ gr frente a $H_1 : \mu \neq 1000$ gr, consideramos test bilateral.

Los datos son: $\bar{x} = 978, \sigma = 100, n = 100$.

- El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 1'96 \dfrac{100}{\sqrt{100}} = 1000 \pm 19'6 = \begin{cases} 1019'6 \\ 980'4 \end{cases}$

  que da el intervalo $(980'4, 1019'6)$.
  Como $\bar{x} = 978$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

- El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 2'58 \dfrac{100}{\sqrt{100}} = 1000 \pm 25'8 = \begin{cases} 1025'8 \\ 974'2 \end{cases}$

  que da el intervalo $(974'2, 1025'8)$.
  Como $\bar{x} = 978$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

- CUESTIÓN 5.B.

La puntuación media obtenida por una muestra aleatoria simple de 81 alumnos de secundaria en el examen de cierta asignatura ha sido 25 puntos. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones de la población es normal con desviación típica igual a 20,25 puntos, calcular el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de significación de 0,01.

selcs Junio 2008 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 25, \sigma = 20'25, n = 81$.

Para el nivel de confianza de 99 %,corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25 \pm 2'58 \cdot \dfrac{20'25}{\sqrt{81}} = 25 \pm 5'805 \begin{cases} 30'805 \\ 19'195 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(19'195, 30'805)$