14.2. Junio 2007

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

Calcular la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

selcs Jun 2007 Solución:

Adjuntamos a la derecha la matriz unidad y para evitar el cero en la esquina le sumamos a la primera fila la segunda:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a + 1^a(-2) \\ 3^a + 1^a(-3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 3^a - 2^a$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) 1^a \cdot 6 + 3^a \begin{pmatrix} 6 & 18 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} 1^a \cdot 7 + 12^a \cdot 18$$

$$\begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 & -1 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dividiendo cada fila por su elemento de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/42 & 11/42 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$ las últimas tres columnas es la matriz inversa.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg. de chocolate, 100kg. de almendras y 85kg. de frutas. Produce dos tipos de cajas de bombones: tipo A y tipo B. Cada caja de tipo A contiene 3kg. de chocolate, 1kg. de almendras y 1kg. de frutas, mientras que cada caja de tipo B contiene 2kg. de chocolate, 1.5kg. de almendras y 1kg. de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 130 euros y 135 euros respectivamente.

a) ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su ganancia?

b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

selcs Jun 2007 Solución:

Disponemos los datos en una tabla:

	chocolate	almendras	frutas	precio
A	3	1	1	130
B	2	1'5	1	135
	≤ 500	≤ 100	≤ 85	

Las variables serían:

x número de cajas de tipo A

y número de cajas de tipo B

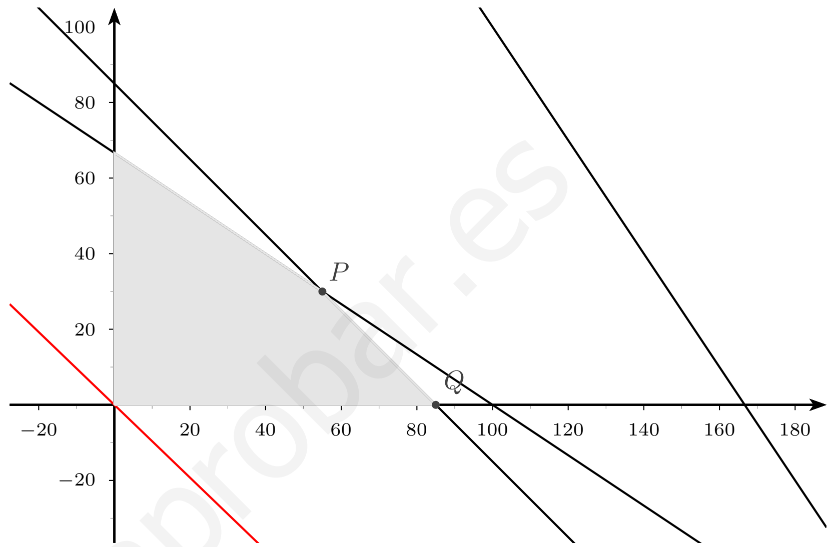
La función a maximizar es $f(x,y) = 130x + 135y$

Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\left\{\begin{array}{r} 3x+2y \leq 500 \\ x+1'5y \leq 100 \\ x+y \leq 85 \end{array}\right.$$

Representamos:

$$\left\{\begin{array}{rl} 3x+2y \leq 500 & \begin{array}{c|cc} x & 100 & 166'6 \\ \hline y & 100 & 0 \end{array} \\ x+1'5y \leq 100 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 166'6 \\ \hline y & 66'6 & 0 \end{array} \\ x+y \leq 85 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 85 \\ \hline y & 85 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$



Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 130x + 135y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -13'5 \\ \hline y & 0 & 13 \end{array}$

Hallemos el punto de corte P resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{r} x+1'5y = 100 \\ x+y = 85 \end{array}\right.$, $\quad P(55,30)$

El otro punto posible es $Q(85,0)$ queda: $f(85,0) = 130 \cdot 85 + 0 = 11050$

El máximo se produce para $P(55,30)$ y $f(55,30) = 130 \cdot 55 + 135 \cdot 30 = 11200$, es el beneficio máximo.

- CUESTIÓN 2.A.

Dada la función $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$, se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

selcs Jun 2007 Solución:

a) Dominio: La función existe siempre salvo en $x = -1$ que anula al denominador.

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = 2$

con $OX: y = 0$, resulta $x = 2$

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

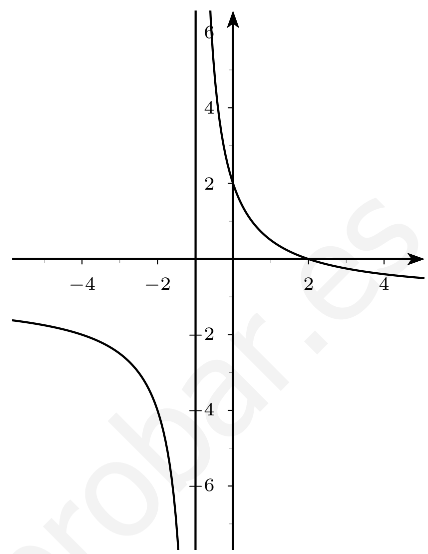
verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x + 1 = 0$, $x = -1$ pues $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \dfrac{2-x}{x+1} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2-x}{x+1} = -1$; $y = -1$

c) Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$ que al ser siempre negativa nos dice que la función es siempre decreciente.



- CUESTIÓN 2.B.

Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

A 10 euros el kilo, si $0 \leq x < 5$

A 9 euros el kilo, si $5 \leq x < 10$

A 7 euros el kilo, si $10 \leq x < 20$

A 5 euros el kilo, si $20 \leq x$,

donde x es el peso en kg. de la cantidad comprada.

a) Escribir la función que representa el precio del artículo.

b) Hacer su representación gráfica.

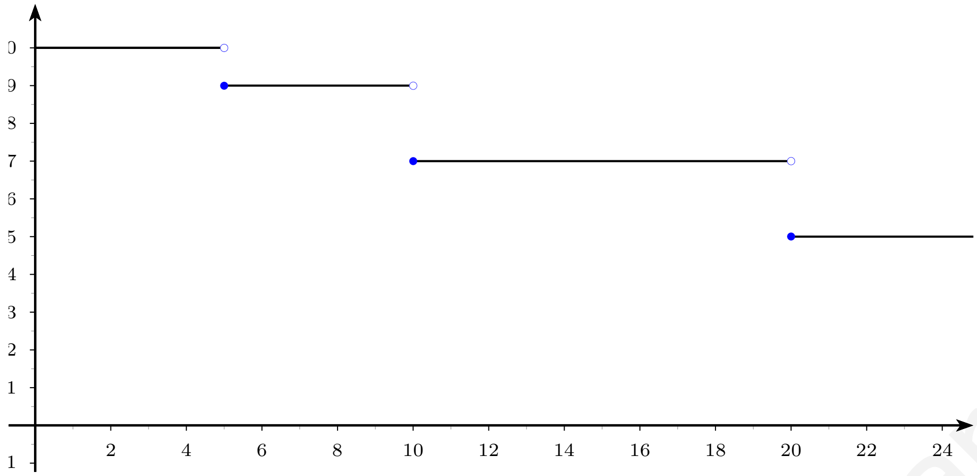
c) Estudiar su continuidad.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & si \quad 0 \leq x < 5 \\ 9 & si \quad 5 \leq x < 10 \\ 7 & si \quad 10 \leq x < 20 \\ 5 & si \quad 20 \leq x \end{cases}$$

b)



c) La gráfica presenta discontinuidades de salto finito en $x = 5, \quad x = 10, \quad x = 20$

Veamos los límites laterales por ejemplo para $x = 5$, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} 10 = 10 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} 9 = 9 \end{cases}$ $\qquad f(5) = 9$

- CUESTIÓN 3.A.

Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

selcs Jun 2007 Solución:

Sean x, y los números.

$x + y = 20; \qquad y = 20 - x$

$P = x.y$ máximo

$P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

Derivando: $P'(x) = 20 - 2x$, en el máximo se anula la derivada $20 - 2x = 0; \quad x = 10$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

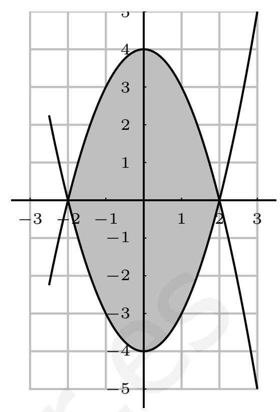
- CUESTIÓN 3.B.

Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$.

selcs Jun 2007 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 \\ g(x) = 4 - x^2 \end{cases}$ $, x^2 - 4 = 4 - x^2; \quad 2x^2 - 8 = 0; x^2 = 4; \quad x = \pm 2$



Como la región es simétrica respecto al eje de ordenadas, el área sera el doble de la integral entre 0 y . La función g es mayor en el intervalo de integración, luego $g(x) - f(x) = 4 - x^2 - (x^2 - 4) = 8 - 2x^2$

$S = 2\int_0^2 (g - f)$

$\int_0^2 (8 - 2x^2) \quad dx = \left[8x - \dfrac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 16 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{32}{3}$

Luego el área es $\frac{64}{3}u^2$.

- CUESTIÓN 4.A.

Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargado dos programas antivirus que actúan independientemente el uno del otro. El programa P_1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0.9 y el programa P_2 detecta el virus con una probabilidad de 0.8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado por ninguno de los dos programas antivirus?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un virus que ha sido detectado por el programa P_1 sea detectado también por el programa P_2?

selcs Jun 2007 Solución:

Sea A "el programa P_1 detecta la presencia de virus "

Sea B "el programa P_2 detecta la presencia de virus"

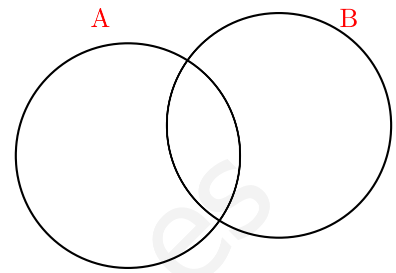
Sabemos: $p(A) = 0'9, p(B) = 0'8$

a) "ninguno detecta virus" es el complementario de "alguno detecta virus", o sea de la unión:

Hallemos primero la probabilidad de la intersección, consideramos que los dos antivirus actúan con independencia: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'9 \cdot 0'8 = 0'72$

Por tanto la probabilidad de la unión es: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'9 + 0'8 - 0'72 = 0'98$

Entonces: $p(\text{ ninguno detecta }) = p(\text{ alguno detecta})^c = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'98 = 0'02$



b) "detecta el virus P_2 habiéndolo detectado P_1 ", es B condicionado a A: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'72}{0'9} = 0'8$, resultado esperado por ser independientes A y B, podríamos haber puesto directamente $p(B/A) = p(B)$.

- CUESTIÓN 4.B.

Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40 % de los clientes paga sus compras con tarjeta de crédito y el 60 % restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 100 euros, la probabilidad de pagar con tarjeta pasa a ser 0.6. Si además sabemos que en el 30 % de las compras el importe es superior a 100 euros, calcular:

a) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros y sea abonado con tarjeta.

b) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros, sabiendo que fue abonado en efectivo.

selcs Jun 2007 Solución:

Consideramos los sucesos:

- S, compra superior a 100 €
- I, compra inferior o igual a 100 €
- T, paga con tarjeta de crédito
- T, paga en efectivo

Nos dan las probabilidades: $p(T) = 0'4, \quad p(E) = 0'6, \quad p(T/S) = 0'6, \quad p(S) = 0'3$

a) Es la probabilidad de la intersección: $p(T \cap S) = p(S) \cdot p(T/S) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$

b) $\{S, I\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

$$p(S/E) = \frac{p(E/S) \cdot p(S)}{p(E/S) \cdot p(S) + p(E/I) \cdot p(I)} = \frac{0'3 \cdot 0'4}{0'3 \cdot 0'4 + 0'6 \cdot 0'7} = 0'22$$

tablas de contingencia: datos iniciales

	S	I	
$T/$	0'6		0'4
$E/$			0'6
	0'3		

datos deducidos:

	S	I	
$T/$	0'6		0'4
$E/$	0'4		0'6
	0'3	0'7	

- CUESTIÓN 5.A.

  El nivel medio de protombina en una población normal es de 20 mg./100 ml. de plasma con una desviación típica de 4 mg./100 ml. Se toma una muestra de 40 individuos en los que la media es de 18.5 mg./100 ml. ¿Es la muestra comparable con la población, con un nivel de significación de 0.05?

  selcs Jun 2007 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 20$ mg./100 ml. frente a $H_1 : \mu \neq 20$ mg./100 ml., consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 18'5, \sigma = 4, n = 40$.

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{400}} = 20 \pm 1'23$ que da el intervalo $(18'77, 21'23)$.

  Como $\bar{x} = 18'5$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 20$ mg./100 ml., la muestra puede venir de otra población.

- CUESTIÓN 5.B.

  El peso de los niños varones a las 10 semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 gr. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 gr.?

  selcs Jun 2007 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 87$;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 15

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{87}{\sqrt{n}} \leq 15; \qquad 1'96 \cdot \dfrac{87}{15} \leq \sqrt{n}; \qquad (11'36)^2 \leq n; \qquad 129'23 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 130 para que al nivel de confianza sea del 95 % el error sea menor que 15 gr.