- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right.$$

  Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

  selcs Jun 2005 Solución:

  Triangulamos la matriz asociada al sistema:

  $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a \cdot 2 + 1^a \\ 3^a. \cdot 2 - 1^a \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Volviendo a sistema queda:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ (2k+2)y = 0 \end{array}\right. \qquad 2k + 2 = 0, \quad k = -\frac{1}{2}$$

  queda por tanto:

  Si $k \neq -\dfrac{1}{2}$ queda $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right.$ sistema compatible determinado: $y = 0, x = 2$.

  Si $k = -\dfrac{1}{2}$ queda $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ 0y = 0 \end{array}\right.$ el sistema se reduce a la ecuación $2x - y = 4$, sistema compatible indeterminado, la solución se puede expresar $y = 2x - 4, \quad x \in R$

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Un grupo de alumnos formado por veinte chicas y diez chicos organizan un viaje. Para que el viaje les salga más económico deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía que se dedica a realizar encuestas y que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:

  Tipo A: Parejas (una chica y un chico).

  Tipo B: Equipos de cuatro (tres chicas y un chico). La compañía paga 30 euros por la tarde de la pareja y 50 euros por la tarde del equipo de cuatro.

  (a) ¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?

  (b) ¿Y si les pagara 30 euros por la tarde de la pareja y 30 euros por la tarde del equipo de cuatro?

  selcs Jun 2005 Solución:

x = número de parejas y = número de equipos de cuatro

Precio total: $f(x,y) = 30x + 50y$ € buscamos el máximo

$$\begin{cases} x+y \leq 10 \\ x+3y \leq 20 \end{cases}$$

Representamos:

$x+y \leq 10$

x	0	10
y	10	0

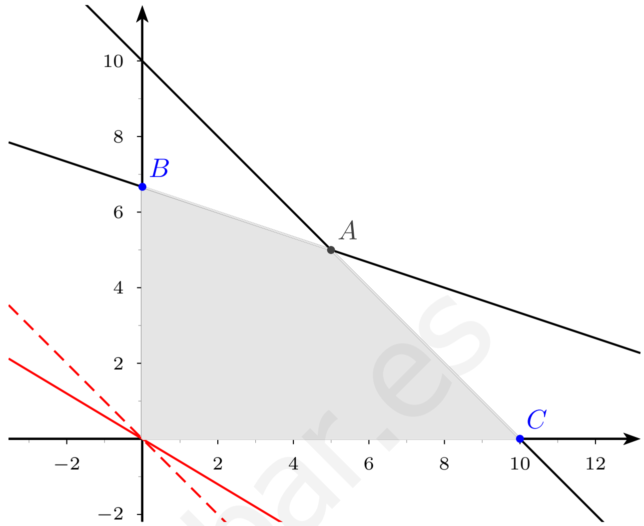
$x+3y \leq 20$

x	0	20
y	$6'66$	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(x,y) = 30x + 50y = 0$

x	0	-5
y	0	3



a) Para maximizar la ganancia tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto A.

Hallemos sus coordenadas:

$$\begin{cases} x+y = 10 \\ x+3y = 20 \end{cases} \qquad A = (5,5)$$

$C(5,5)$, o sea 5 parejas y 5 de cuatro. El beneficio sería: $f(5,5) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 400$ € .

b) Ahora la nueva función de beneficio sería: $f^*(x,y) = 30x + 30y = 0$

x	0	-2
y	0	2

Ahora el máximo se da en cualquier punto de la recta AC pues:

$f^*(5,5) = 30 \cdot 5 + 30 \cdot 5 = 300$ € .

$f^*(10,0) = 30 \cdot 10 = 300$ € .

Los puntos de esa recta que tengan coordenadas enteras son: $(5,5)(6,4),(7,3),(8,2),(9,1),(10,0)$

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, se pide:

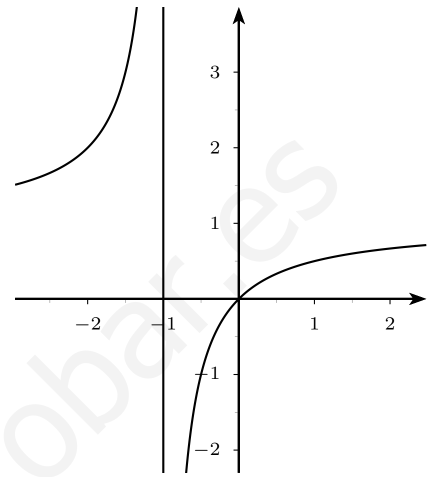
  (a) Calcular su dominio y asíntotas.

  (b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  (c) Hacer su representación gráfica aproximada.

  selcs Jun 2005 Solución:

Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:



a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{0}{1} = 0$

con $OX : y = 0$, resulta el mismo

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $x + 1 = 0$, $\quad x = -1$ pues $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x+1} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1; \quad y = 2$

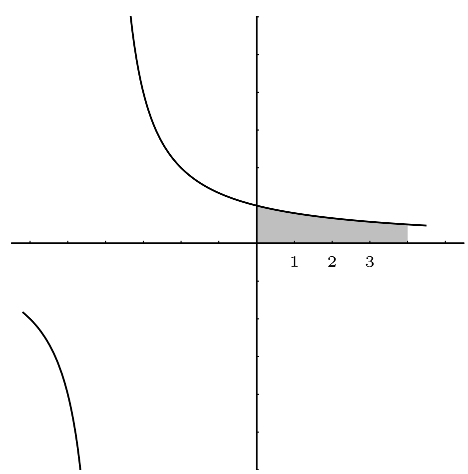
Como piden el crecimiento hacemos la derivada:

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, como es siempre positiva f es siempre creciente.

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcular el área de S.

selcs Jun 2005 Solución:



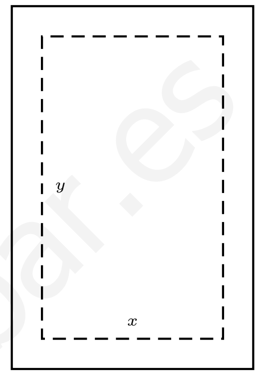
La curva es una hipérbola.

$S = \displaystyle\int_0^4 \frac{4}{x+4}dx = [4\ln|x+4|]_0^4 = 4(\ln 8 - \ln 4) = 2'77\ u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Una hoja de papel debe tener 18 cm2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

selcs Jun 2005 Solución:



Área texto: $x \cdot y = 18\ cm^2$
Área folio: $S = (x+2)(y+4)$ mínima.
Sustituyendo:
$S(x) = (x+2)(\frac{18}{x} + 4) = \frac{36}{x} + 4x + 26$ mínimo
Derivamos y anulamos la derivada:
$S'(x) = -\frac{36}{x^2} + 4 = \frac{-36+4x^2}{x^2}; \quad -36+4x^2 = 0, \quad x = \pm 3$

x		3	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

MÍNIMO

En consecuencia $y = \frac{18}{3} = 6$

Por tanto el folio tiene 5 de ancho por 10 de alto.

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

(a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes?

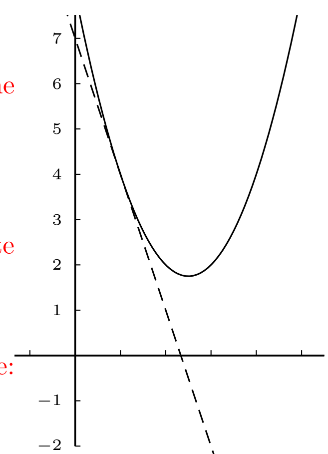
(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $P(1,2)$. (nota: El punto es exterior a la parábola se puede resolver haciendo que la recta $y - 2 = m(x-1)$ toque en un solo punto a la parábola; preferimos cambiar enunciado: tangente por $P(1,4)$)

selcs Jun 2005 Solución:

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con $OY: x = 0$, resulta $y = 8$

con $OX: y = 0$, resulta $x^2 - 5x + 8 = 0, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2}$ no tiene solución, la parábola no corta al eje OX

El mínimo lo hallamos derivando y anulando la derivada:
$f'(x) = 2x - 5 = 0, \quad x = 2'5; f(2'5) = 1'75$ Mínimo en $(2'5, 1'75)$



a) La bisectriz del del primer y tercer cuadrantes tiene de pendiente $m = 1$ luego nos piden encontrar en qué punto la derivada es 1.
$f'(x) = 2x - 5 = 1 \quad x = 3; f(3) = 9 - 15 + 8 = 2$ El punto es $(3,2)$

b) La recta tangente en el punto x_0 es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde:
$y_0 = f(x_0) = f(1) = 4$
$m = f'(x_0) = f'(1) = 2 - 5 = -3$
Queda $y - 4 = -3(x-1)$

Por tanto la recta tangente en el punto $x = 2$ es $y = -3x + 7$

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

  Tres amigos juegan con un dado de la siguiente forma. Cada uno lanzará el dado a lo sumo una vez. Si el primero en lanzar saca un seis, gana y se acaba la partida; si no saca un seis, lanza el segundo, que gana si obtiene un cuatro o un cinco, acabando la partida. Si tampoco gana éste, lanza el dado el tercero, que gana si obtiene tres, dos o uno. Aunque no gane el tercero, la partida se termina.

  Hallar la probabilidad que tiene cada uno de ganar y la probabilidad de que la partida termine sin ganador.

  selcs Jun 2005 Solución:

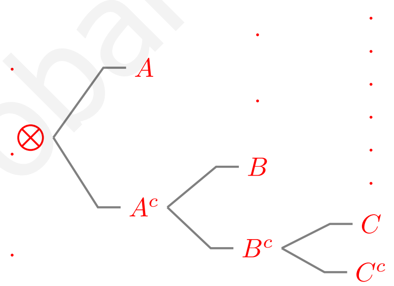
  Llamamos A ganar el primero, C ganar el segundo,C ganar el tercero.

  a) Ganar el primero: $p(A) = \frac{1}{6}$

  b) Ganar el segundo: $p($ ganar el segundo $) = p($ no gana el primero $) \cdot$ $p($ gana el segundo $) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$

  c) Ganar el tercero: $p($ ganar el tercero $) = p($ no gana el primero $) \cdot$ $p($ no gana el segundo $) \cdot p($ gana el tercero $) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$

  No gana nadie: $p($ no gana nadie $) = p($ no gana el primero $) \cdot$ $p($ no gana el segundo $) \cdot p($ no gana el tercero $) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$

- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

  Una fábrica dispone de tres máquinas A_1, A_2 y A_13 que fabrican tornillos. Se sabe que la máquina A_1 produce un 1 % de tornillos defectuosos, la máquina A_2 un 3 % y la máquina A_3 un 2 %. La máquina A_1 produce el 25 % del total de unidades, la A_2 el 40 % y la A_3 el 35 %. Al cabo de un día, se toma un tornillo al azar de la producción total y se pide:

  (a) Calcular la probabilidad de que ese tornillo sea defectuoso.

  (b) Si ha resultado defectuoso, calcular la probabilidad de que pertenezca a la máquina A_2 .

  selcs Jun 2005 Solución:

  a) Teorema de la probabilidad total

  $$p(D) = p(D/A_1) \cdot p(A_1) + p(D/A_2) \cdot p(A_2) + (D/A_3) \cdot p(A_3) = \frac{1}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{35}{100} = 0'0215$$

  b) Teorema de Bayes

  $$p(A_2/D) = \frac{p(D/A_2) \cdot p(A_2)}{p(D/A_1) \cdot p(A_1) + p(D/A_2) \cdot p(A_2) + +(D/A_3) \cdot p(A_3)} = \frac{0'03 \cdot 0'4}{0'0215} = 0'5581$$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de 100 puntos. Se sabe por experiencia que la variable "inteligencia de todos los estudiantes" es normal con una desviación típica igual a 10, pero se desconoce la media. ¿Entre qué limites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza de 0.99?

selcs Jun 2005 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 100, \sigma = 10, n = 25$.

Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 2'58 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'16 \begin{cases} 105'16 \\ 94'84 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la inteligencia de todos los estudiantes es $(94'84, 105'16)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

  Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene de media 37^0C y de desviación típica 0.85^0C. Se elige una muestra de 105 personas y se pide: (a) Calcular la probabilidad de que la temperatura media sea menor de 36.9^0C (b) Calcular la probabilidad de que la temperatura media esté comprendida entre 36.5^0C y 37.5^0C

selcs Jun 2005 Solución:

Distribución muestral

Los parámetros de la población son: $\mu = 37^0$C, $\sigma = 0'85^0$C

La muestra es de $n = 105$ personas.

La distribución muestral es por tanto $N(37, \dfrac{0'85}{\sqrt{105}}) = N(37, 0'082)$

a)

$p(\bar{X} \leq 36'9) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{36'9 - 37}{0'082} = -1'2 \right\} = p(Z \leq -1'2) = 1 - p(Z \leq -1'2) = 1 - 0'8869 = 0'1131$

b)

$p(36'5 \leq \bar{X} \geq 37'5) = \left\{ \text{tipificando} \quad \begin{array}{l} z_1 = \frac{36'5-37}{0'082} = -6'09 \\ z_2 = \frac{37'5-37}{0'082} = 6'09 \end{array} \right\} = p(Z \leq 6'9) - p(Z \leq -6'9) \approx 1 - 0 = 1$