- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

  selcs Jun 2004 Solución:

  Sea: x= número A; y= número B; z= número C

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=210 \\ \frac{x+z}{2}+\frac{y}{4}=95 \\ \frac{y+z}{2}=80 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=210 \\ 2x+y+2z=480 \\ y+z=160 \end{array}\right.$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 1 & 2 & 380 \\ 0 & 1 & 1 & 160 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a\cdot+1^a\cdot(-2) \\ 3^a\cdot-1^a \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 1 & 160 \end{pmatrix} 3^a\cdot+2^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{pmatrix}$$

  Pasando a sistema: $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=210 \\ -y=-40 \\ z=120 \end{array}\right.$ los números son A=50, B=40, C=120

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3000 kg, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

  selcs Jun 2004 Solución:

  Sean:

  $x=$ número plazas de fumador

  $y=$ número plazas de no fumador

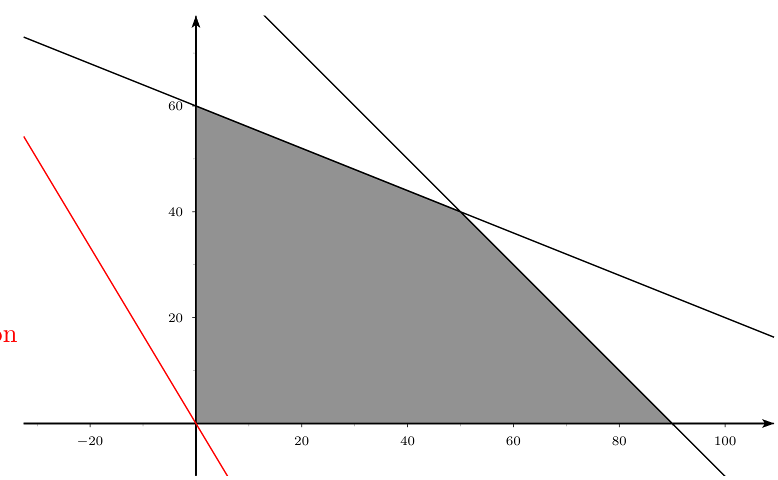
  Ganancia: $f(x,y)=100x+60y$ céntimos

  $$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 90 \\ 20x+50y\leq 3000 \end{array}\right\}$$

  Representamos: $x+y\leq 90$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 90 \\ \hline y & 90 & 0 \end{array}$

  $20x+50y\leq 3000$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 150 \\ \hline y & 60 & 0 \end{array}$ Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy)=100x+60y=0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -60 \\ \hline y & 0 & 100 \end{array}$

  Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x,y)=0$ más alejada, la que pasa por el punto $(90,0)$, y el beneficio máximo sería:

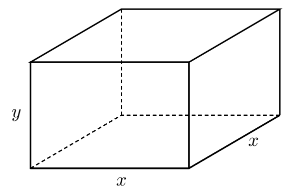
  $f(90,0)=100\cdot 90+0=9000$ €

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

Determinar las condiciones más económicas de una piscina abierta al aire, de volumen 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesite la cantidad mínima de material.

selcs Jun 2004 Solución:

Sean:
x = lado de la base
y = altura
Volumen $V = x^2 \cdot y = 32$
Superficie de paredes y suelo $S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\dfrac{32}{x^2} = x^2 + \dfrac{128}{x}$ mínimo



$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0; \quad 2x^3 - 128 = 0, \quad x^3 = 64; \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

x		4	
S'	$-$		$+$
S	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

Las dimensiones son: lado de la base 4, altura 2

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

Hallar el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$.

selcs Jun 2004 Solución:

Hallamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = x^2 \end{cases} \qquad x^3 - x = x^2; \quad x^3 - x^2 - x = 0; \quad x(x^2 - x - 1) = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como se cortan en tres puntos él área viene dada por la suma del valor absoluto de la integral de la resta de la funciones en cada intervalo:

$$\int (x^3 - x - x^2)dx = \int (x^3 - x^2 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x^3 - x^2 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{13 + \sqrt{125}}{24}$$

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 (x^3 - x^2 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 = \frac{13 - \sqrt{125}}{24}$$

El área total es: $S = \dfrac{13 + \sqrt{125}}{24} + \dfrac{13 - \sqrt{125}}{24} = \dfrac{13}{12} = 1'09$ u^2

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Dada la curva: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ se pide:

(a) Dominio y asíntotas.

(b) Simetrías y cortes con los ejes.

(c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(d) Máximos y mínimos, si los hay.

(e) Una representación aproximada de la misma.

selcs Jun 2004 Solución:

(a) El denominador se anula para $x = \pm 1$, luego el dominio es $R - \{-1, 1\}$

Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en el punto en que se anule el denominador:

$x = -1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = 0; \quad y = 0$

(b) Simetrías cortes con los ejes.

Para ver simetrías hacemos $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x)$ por tanto hay simetrías respecto al origen.

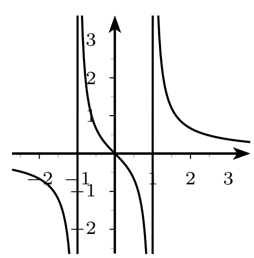
Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con OY : $x = 0$, resulta $y = 0$

con OX : $y = 0$, resulta el mismo, el origen

(c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: estudiamos el signo de la derivada: $f'(x) = y' = \frac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$
que, como es siempre negativa, nos dice que la función es siempre decreciente.

(d) Como conclusión de lo anterior no hay máximos ni mínimos relativos. (tampoco absolutos)

(e) Una representación aproximada de la curva.



- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

Calcular a, b, c y d para que sea continua la función $f(x)$ y representarla gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x - a & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ b & \text{si} \quad 3 \le x < 5 \\ -x + c & \text{si} \quad 7 \le x < 7 \\ d & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

selcs Jun 2004 Solución:

Para que sea continua han de coincidir los límites laterales:

En $x = 2$ $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}x = 1$, $\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x-a) = 6-a$ $\quad$ Para que sea continua $6 - a = 1; \quad a = 5$

En $x = 3$ $\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3x-5) = 4$, $\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} b = b$ $\quad$ Para que sea continua $b = 4$

En $x = 5$ $\quad \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} 4 = 4$, $\quad \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (-x+c) = -5+c$ $\quad$ Para que sea continua $-5 + c = 4; \quad c = 9$

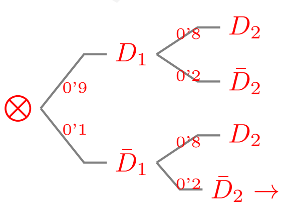
En $x = 7$ $\quad \lim_{x\to 7^-} f(x) = \lim_{x\to 7^-} (-x+9) = 2$, $\quad \lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7^+} d = d$ $\quad$ Para que sea continua $d = 2$

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargados dos programas antivirus que actúan independientemente uno del otro. El programa p_1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0.9 y el programa p_2 detecta el virus con una probabilidad de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado?

selcs Jun 2004 Solución:

D es detectar el virus:



La probabilidad de que no lo detecte ningún antivirus es $0'1 \cdot 0'2 = 0'02$

- CUESTIÓN 4.B [1.5 PUNTOS]

En un colegio el 4 % de los chicos y el 1 % de las chicas miden más de 175 cm de estatura. Además el 60 % de los estudiantes son chicas. Si se selecciona al azar un estudiante y es más alto de 175 cm, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea chica?

selcs Jun 2004 Solución:

Llamamos B al suceso "medir más 175 cm".

Llamamos O al suceso "ser chico "; $p(O) = 0'40$; $\quad p(B/O) = 0'04$

Llamamos A al suceso "ser chica "; $p(A) = 0'60$; $\quad p(B/D) = 0'01$

$\{O, A\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B/O) \cdot p(O) + p(B/A) \cdot p(A)} = \frac{0'01 \cdot 0'60}{0'04 \cdot 0'40 + 0'01 \cdot 0'60} = 0'273$$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x} = 8{,}1$ días; s =9 días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media.

  selcs Jun 2004 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 8'1$, desviación típica de la muestra =9, $n = 800$.

  Para el nivel de confianza del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Estimamos $\sigma = 9$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8'1 \pm 1'96 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{800}} = 8'1 \pm 0'6236 \begin{cases} 8'72366 \\ 7'47633 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para el número medio de días es $(7'47633, 8'72366)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

  Se quiere comprobar, con un nivel de significación de 0.05, si una muestra de tamaño $n = 20$ con media $\bar{x} = 10$ procede de una población que se distribuye según una normal de media igual a 14 y desviación típica igual a 3.

  selcs Sep 2004 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 14$ frente a $H_1 : \mu \neq 14$,

  La desviación típica es $\sigma = 3$

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 \pm 1'96 \dfrac{3}{\sqrt{20}} = 14 \pm 1'3148 = \begin{cases} 15'3148 \\ 12'6852 \end{cases}$

  que da el intervalo $(12'6852, 15'3148)$.

  Como $\bar{x} = 10$ € queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 14$, la muestra no procede de esa población con ese nivel de significación.