Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) ¿Es posible calculara $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b.- (*3 puntos*) Encontrar, si existe, una matriz *X*, que verifique $2X+3B=2C$.

c.- (*3 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de *D*.

2.- (*10 puntos*) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

3.- (*10 puntos*)

a.- (*3 puntos*) Calcular la derivada de:

$$f(x)=e^{3x^2-5x}$$

b.- (*3 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (*4 puntos*) Calcular:

$$\int_0^2\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx$$

4.- (*10 puntos*) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+100\right)$$

Donde $x\in[2,15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y *C* es el coste unitario (en euros). Calcular:

a.- *(1 punto)* Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b.- *(4 puntos)* ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x\in[2,15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c.- *(5 puntos)* ¿Para qué tamaño de la producción $x\in[2,15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

5.- (*10 puntos*) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

a.- *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?

b.- *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

c.- *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de los dos hayan votado por Londres?

d.- *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

6.- (*10 puntos*) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- *(5 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- *(4 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

1**75, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158**

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c.- *(1 punto)* Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) ¿Es posible calculara $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b.- (*3 puntos*) Encontrar, si existe, una matriz *X*, que verifique $2X+3B=2C$.

c.- (*3 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de *D*.

a.- B es de dimensión 3 x 2, A es una matriz de dimensión 2 x 3. Para poder realizar un producto de matrices en número de columnas del primer factor del producto debe ser igual al número de filas del segundo.

$$B\ \cdot A$$

$$3x\boxed{2\cdot 2}x3 \longrightarrow 3x3$$

BA se puede calcular y se obtiene una matriz 3x3.

$$(BA)^2=(BA)(BA)$$

$$3x\boxed{3\cdot 3}x3 \rightarrow 3x3$$

$(BA)^2$ se puede calcular y se obtiene una matriz 3x3.

Calculamos la expresión de $(BA)^2$.

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+0 & 6+0 & 4+0 \\ -2+2 & -3+0 & -2+2 \\ -2+1 & -3+0 & -2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^2=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16+0-4 & 24-18-12 & 16+0-4 \\ 0+0+0 & 0+9+0 & 0+0+0 \\ -4+0+1 & -6+9+3 & -4+0+1 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$$

b.- Despejamos X de la ecuación $2X+3B=2C$

$$2X+3B=2C \Rightarrow 2X=2C-3B \Rightarrow X=\frac{1}{2}(2C-3B)=C-\frac{3}{2}B$$

Sustituimos las matrices C y B en la expresión anterior.

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3/2 & -3 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}}$$

c)

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1+3 = 4 \neq 0 \text{ Existe la inversa de D.}$$

$$D^{-1} = \frac{Adj\left(D^t\right)}{|D|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.- (*10 puntos*) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

Llamemos "x" al número de vestidos de fiesta e "y" al número de vestidos de calle.
Realizamos una tabla para clarificar la situación planteada.

	Metros de tela	Horas de trabajo	Beneficio
Nº vestidos de fiesta (x)	3x	6x	100x
Nº vestidos de calle (y)	y	4y	65y
TOTALES	$3x+y$	$6x+4y$	$100x+65y$

Como el taller solo dispone de 36 metros de tela → $3x+y\leq 36$
Como el taller solo dispone de 120 horas de trabajo → $6x+4y\leq 120$
Como no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle → $x\leq y$
El número de vestidos es una cantidad positiva → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\leq 36 \\ 6x+4y\leq 120 \\ x\leq y \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y\leq 36 \\ 3x+2y\leq 60 \\ x\leq y \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Y la función objetivo son los beneficios que los deseamos maximizar $B(x,y)=100x+65y$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que separan el plano en zonas.

$3x+y=36$

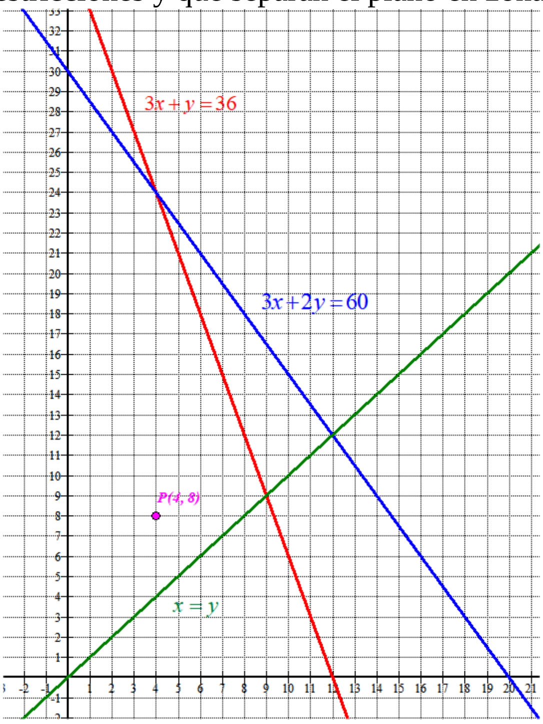
x	$y=36-3x$
0	36
12	0

$3x+2y=60$

x	$y=\dfrac{60-3x}{2}$
0	30
20	0

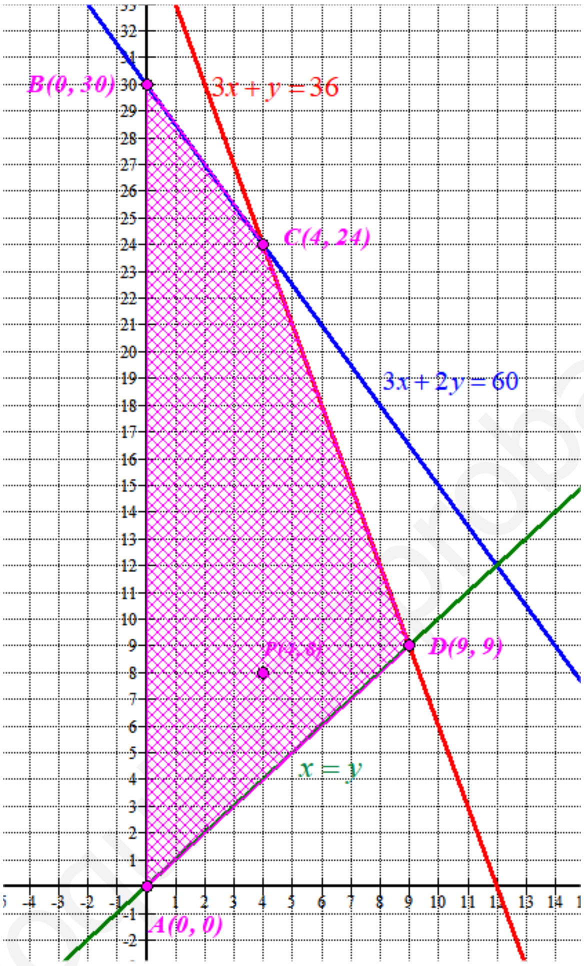
$x=y$

x	$y=x$
0	0
12	12



Comprobamos si el punto P(4, 8) satisface todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12+8\le 36 \\ 12+16\le 60 \\ 4\le 8 \\ 4\ge 0 \\ 8\ge 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas las restricciones y la región factible es la zona rayada.



Las coordenadas de los vértices C y D se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones formado por las ecuaciones de los pares de rectas.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=36 \\ 3x+2y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=36-3x \\ 3x+2y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+2(36-3x)=60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+72-6x=60 \Rightarrow -3x=-12 \Rightarrow \boxed{x=4} \Rightarrow \boxed{y=36-12=24} \Rightarrow \boxed{C(4,24)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=36 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+y=36 \Rightarrow 4y=36 \Rightarrow y=9 \Rightarrow x=9 \Rightarrow \boxed{D(9,9)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=100x+65y$ en cada vértice en busca de un valor máximo.

- A(0,0) → $B(0,0)=0$
- B(0, 30) → $B(0,30)=1950$
- C(4, 24) → $B(4,24)=400+1560=1960$
- D(9, 9) → $B(9,9)=900+595=1495$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(4, 24) con un beneficio de 1960 €. Hay que fabricar 4 vestidos de fiesta y 24 de calle para obtener un beneficio máximo de 1960 €.

3.- (*10 puntos*)
a.- (*3 puntos*) Calcular la derivada de:

$$f(x)=e^{3x^2-5x}$$

b.- (*3 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (*4 puntos*) Calcular:

$$\int_0^2\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx$$

a.- $f(x)=e^{3x^2-5x}\Rightarrow f'(x)=e^{3x^2-5x}(6x-5)$

b.- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}}=\frac{3+\frac{2}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{5}{\infty}}}=\frac{3+0}{\sqrt{16+0}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

Este límite se puede hacer también con equivalencias.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{16x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{16}\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{4\cancel{x}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

c.- Para calcular la integral definida $\int_0^2\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx$ calculamos primero la primitiva $\int\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx$.

$$\int\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx=\int 3x^2dx-\int\frac{1}{\sqrt{4x+1}}dx=$$

Cambio de variable en 2ª integral

$$4x=t\Rightarrow 4dx=dt\Rightarrow dx=\frac{1}{4}dt$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{4x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t+1}}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2\sqrt{t+1}}dt=\frac{1}{2}\sqrt{t+1}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshago el cambio}\\ \text{de variable } 4x=t\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$$

$$=x^3-\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}+C$$

Seguimos con la integral definida inicial.

$$\int_0^2\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx=\left[x^3-\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_0^2=$$

$$=\left[2^3-\frac{1}{2}\sqrt{8+1}\right]-\left[0^3-\frac{1}{2}\sqrt{0+1}\right]=8-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{7}$$

4.- (*10 puntos*) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+100\right)$$

Donde $x\in[2,15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a.- *(1 punto)* Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b.- *(4 puntos)* ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x\in[2,15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c.- *(5 puntos)* ¿Para qué tamaño de la producción $x\in[2,15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

a.- Como en la función coste la "x" viene en miles de unidades, nos piden calcular *C(5)*, que sustituyendo en la fórmula queda $C(5)=\frac{1}{10}\left(5^2-80+100\right)=\frac{45}{10}=\boxed{4{,}5\text{ €}}$

b.- Debe ser $C(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+100\right)<4\Rightarrow x^2-16x+100<40\Rightarrow x^2-16x+60<0$

Esta es una inecuación que se resuelve averiguando cuando es 0 y luego ver cuando es negativa.

$$x^2-16x+60=0\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-240}}{2}=\frac{16\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{16+4}{2}=10=x\\ \frac{16-4}{2}=6=x\end{cases}$$

Con los valores x = 6 y x = 10 el intervalo $[2,15]$ se divide en tres partes veamos en que partes es negativa la expresión $x^2-16x+60$.

- En [2, 6] tomamos x = 4 y la expresión $x^2-16x+60$ vale $4^2-64+60=12>0$. En [2, 6] es positiva.

- En [6, 10] tomamos x = 8 y la expresión $x^2-16x+60$ vale $8^2-128+60=-4<0$ En [6, 10] es negativa.

- En [10, 15] tomamos x = 12 y la expresión $x^2-16x+60$ vale $12^2-192+60=12>0$. En [10, 15] es positiva.

El coste unitario es inferior a 4 euros entre 6000 y 10000 unidades.

c.- Para hallar esos máximos y mínimos utilizo la derivada de $C(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+100\right)$.

$$C(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+100\right)\Rightarrow C'(x)=\frac{1}{10}(2x-16)$$

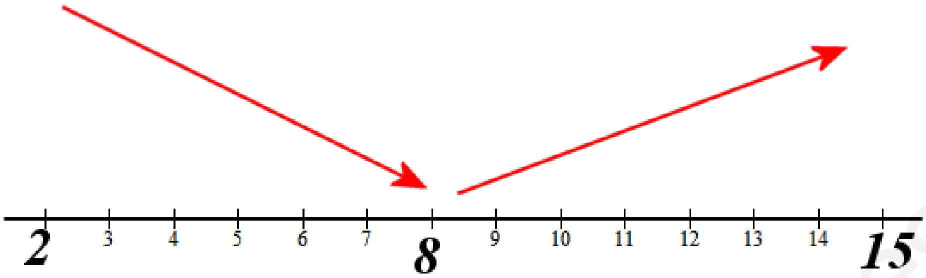
$$C'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{10}(2x-16)=0\Rightarrow 2x-16=0\Rightarrow 2x=16\Rightarrow\boxed{x=8}$$

- Antes de 8, por ejemplo en x = 5 la derivada del coste es

$C'(5)=\frac{1}{10}(10-16)=-\frac{6}{10}<0$. El coste decrece.

- Después de 8, por ejemplo en x = 10 la derivada del coste es

$C'(10)=\frac{1}{10}(20-16)=\frac{4}{10}>0$. El coste crece.



En x = 8 el coste presenta un mínimo.
Averiguamos ese coste mínimo:

$$C(8)=\frac{1}{10}\left(8^2-16\cdot 8+100\right)=\frac{1}{10}(64-128+100)=\frac{36}{10}=3,6\text{ €}$$

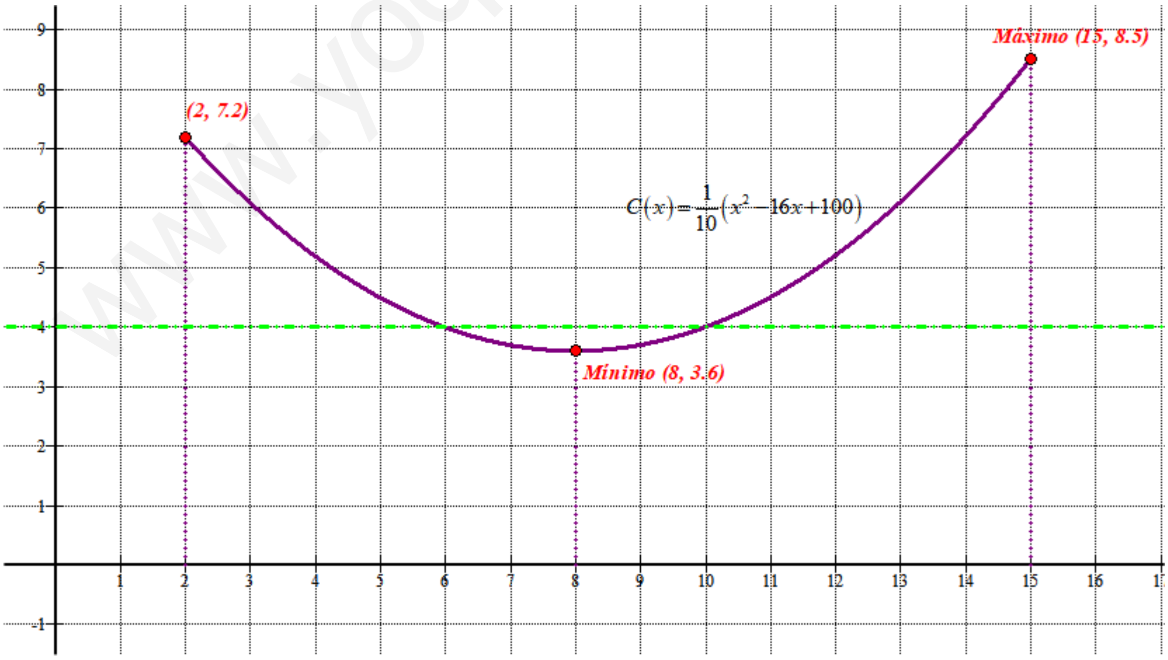
Para hallar el máximo valoramos el coste en los extremos del intervalo $[2,15]$.

x = 2 → $C(2)=\frac{1}{10}\left(2^2-32+100\right)=\frac{72}{10}=7,2\text{ €}$

x = 15 → $C(15)=\frac{1}{10}\left(15^2-240+100\right)=\frac{85}{10}=8,5\text{ €}$

El coste unitario mínimo se obtiene produciendo 8000 unidades siendo de 3.6 €.
El coste unitario máximo se obtiene produciendo 15000 unidades siendo de 8.5 €.

Dibujamos esta función para poder comprobar todo lo dicho hasta ahora.



5.- (*10 puntos*) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.
a.- (2 puntos) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
b.- (2 puntos) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
c.- (3 puntos) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de los dos hayan votado por Londres?
d.- (3 puntos) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Hacemos una tabla de contingencia para aclarar la situación.

	Clase A	Clase B	Clase C	
Vota por Londres	12	10	18	
Vota por París				
	28	25	23	

Completamos la tabla.

	Clase A	Clase B	Clase C	
Vota por Londres	12	10	18	40
Vota por París	16	15	5	36
	28	25	23	76

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas usando la regla de Laplace.

a.- De los 76 alumnos 40 han votado por Londres, por lo que

$$P(Haya\ votado\ por\ Londres) = \frac{40}{76} = \boxed{\frac{10}{19} = 0.526}$$

b.- De los 40 que han votado por Londres hay 10 en la clase B, por lo que

$$P(Sea\ de\ clase\ B\ /\ Ha\ votado\ por\ Londres) = \frac{10}{40} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

c.- Como es sin reemplazamiento la probabilidad de haber votado por Londres en la primera elección es $\frac{40}{76}$ y en la segunda elección (ya tenemos uno menos que sabemos ha votado por Londres) la probabilidad es $\frac{39}{75}$

$$P(Los\ dos\ hayan\ votado\ por\ Londres) =$$

$$= P(1^{o}\ vota\ por\ Londres)P(2^{o}\ vota\ por\ Londres / 1^{o}\ ha\ votado\ Londres) =$$

$$= \frac{40}{76} \cdot \frac{39}{75} = \boxed{0.2736}$$

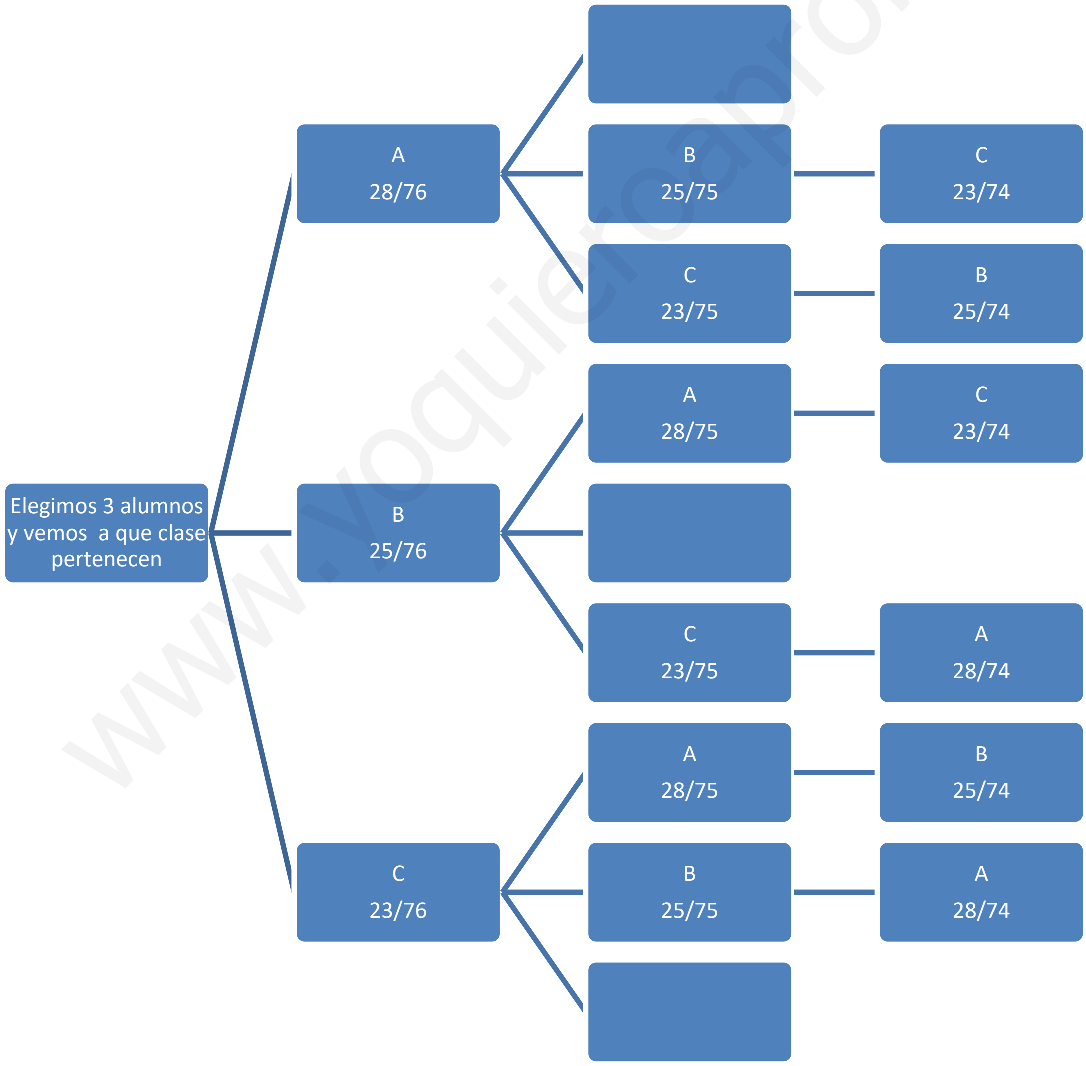
d.- Para que los tres alumnos sean de distinta clase debe ser uno de A, otro de B y otro de C. Puede suceder de 6 formas distintas que expresamos de forma simbólica ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
Calculamos la probabilidad de cada uno de ellos y la probabilidad pedida es la suma de ellas.

$$P(ABC)=$$
$$=P(\text{Elegir el 1º de la clase A})P(\text{Elegir el 2º de la clase B})P(\text{Elegir el 3º de la clase C})=$$
$$=\frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74}=\frac{28\cdot 25\cdot 23}{76\cdot 75\cdot 74}=\boxed{0.038}$$

$$P(ACB)=$$
$$=P(\text{Elegir el 1º de la clase A})P(\text{Elegir el 2º de la clase C})P(\text{Elegir el 3º de la clase B})=$$
$$=\frac{28}{76}\cdot\frac{23}{76}\cdot\frac{25}{76}=\frac{28\cdot 25\cdot 23}{76\cdot 75\cdot 74}=\boxed{0.038}$$
$$P(BAC)=\boxed{0.038};\ P(BCA)=\boxed{0.038};\ P(CAB)=\boxed{0.038};\ P(CBA)=\boxed{0.038}$$

Como hemos visto que es la misma en cada una de las 6 situaciones posibles entonces la probabilidad de elegir un alumno de cada clase es 6 · 0.038 = $\boxed{0.228}$

Este último apartado se puede resolver con un diagrama de árbol. Para no hacerlo muy grande suprimimos las ramas que no son favorables a nuestro suceso "Tres alumnos de clases distintas"



$$P(\text{Tres de distinta clase})=\frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74}+\frac{28}{76}\cdot\frac{23}{75}\cdot\frac{25}{74}+\frac{25}{76}\cdot\frac{28}{75}\cdot\frac{23}{74}+\frac{25}{76}\cdot\frac{23}{75}\cdot\frac{28}{74}+$$
$$+\frac{23}{76}\cdot\frac{28}{75}\cdot\frac{25}{74}+\frac{23}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{28}{74}=6\cdot\frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74}=\boxed{0.228}$$

6.- (*10 puntos*) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- (5 puntos) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- (4 puntos) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c.- (1 punto) Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

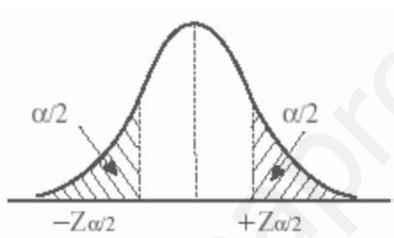
Sea X la variable aleatoria que da la estatura en centímetros de un estudiante.

Sabemos que sigue una N(**μ**, 10).

a.-

Para un nivel de confianza del 97%

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$



El error es la mitad de la longitud del intervalo de confianza, por lo que *Error = 2 cm*

Utilizamos la fórmula y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2{,}17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2{,}17 \cdot 10}{2} = 10{,}85$$

$$n = (10{,}85)^2 = 117{,}72$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 118 estudiantes.

b.- La media de la muestra es

$$\bar{x} = \frac{175+187+183+162+161+164+180+171+158}{9} = 171{,}22$$

También tenemos que n = 9

Para un nivel de confianza del 97%

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 7{,}23$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (171.22 - 7.23, 171.22 + 7.23) = (163.99, 178.45)$$

c.- Para el cálculo de la varianza utilizamos la fórmula: $Varianza = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2$

$$Varianza = \frac{175^2 + 187^2 + 183^2 + 162^2 + 161^2 + 164^2 + 180^2 + 171^2 + 158^2}{9} - 171{,}22^2 = 100{,}267$$