Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de *m* céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

2A. Dada la función $f(x)=\frac{a}{x+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de *a* que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot ln(2)$, donde *F* denota una primitiva de *f* .

b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje *X* entre $x = -3$ y $x = -2$.

2B. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por *f (x)* el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado *x* toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}\left(-x^2+100x-1600\right)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\frac{120}{x}$ millones de euros.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

3A. El 20% de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80% restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6% fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12% fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60% de las veces la máquina *A* y el 40% restante la *B*. La máquina *A* produce un 5% de tornillos defectuosos y la *B* un 2,5%.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina *B*.

4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros. [+]

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90% de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90%?

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.[+]

a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

[+] Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES:

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de *m* céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

a) Si *m* = precio de cada fotocopia en blanco y negro entonces *4m* = precio de una fotocopia en color.

Llamemos "*x*" al número de fotocopias en blanco y negro e "*y*" al número de fotocopias en color.

"*Se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias"* → $x+y=550$

"*El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros = 350 céntimos*" → $mx+4my=350$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=550 \\ mx+4my=350 \end{array}\right\}$$

b) Para que el sistema tenga solución lo reducimos por Gauss a un sistema triangular.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=550 \\ mx+4my=350 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - m \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrl} mx & +4my & =350 \\ -mx & -my & =-550m \\ \hline & 3my & =350-550m \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=550 \\ 3my=350-550m \end{array}\right\}$$

El sistema tiene solución si $m\neq 0$ pues podemos obtener la solución de "y" →

$y=\dfrac{350-550m}{3m}$ y después el valor de "x".

La solución es única cuando $m\neq 0$.

Si la fotocopia en color es de 2 céntimos entonces $4m=2\Rightarrow m=\dfrac{2}{4}=0,5\ \textit{céntimos}$.

Obtenemos el número de fotocopias de cada tipo resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=550 \\ 0,5x+2y=350 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 0,5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrl} 0,5x & +2y & =350 \\ -0,5x & -0,5y & =-275 \\ \hline & 1,5y & =75 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=550 \\ 1,5y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=550 \\ \boxed{y=\dfrac{75}{1,5}=50} \end{array}\right\} \Rightarrow x+50=550 \Rightarrow \boxed{x=500}$$

Se realizaron 500 fotocopias en blanco y negro y 50 en color.

www.yoquieroaprobar.es

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

a) Es un problema de programación lineal.
Llamemos "x" al número de mesas altas e "y" al número de mesas bajas.
Las restricciones del problema son:
"*Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2*" → $2x+4y\le 120$
"*El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas*" → $y\ge 5$
"*El propietario quiere que haya como mucho el doble de mesas altas que bajas*" → $y\le 2x$
El número de mesas es positivo → $x\ge 0$

Resumimos las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y\le 120 \\ y\ge 5 \\ y\le 2x \\ x\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\le 60 \\ y\ge 5 \\ y\le 2x \\ x\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos gráficamente el conjunto de soluciones dibujando primero las rectas asociadas que delimitan la región factible.

$x+2y=60$

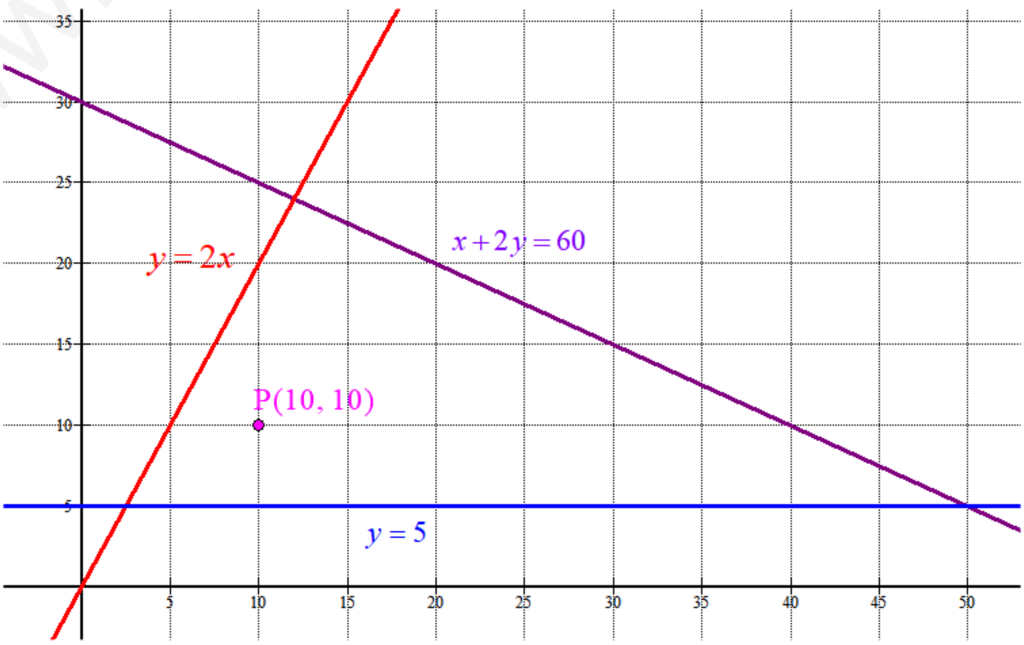
x	$y=\frac{60-x}{2}$
0	30
30	15
60	0

$y=5$

x	$y=5$
0	5
30	5

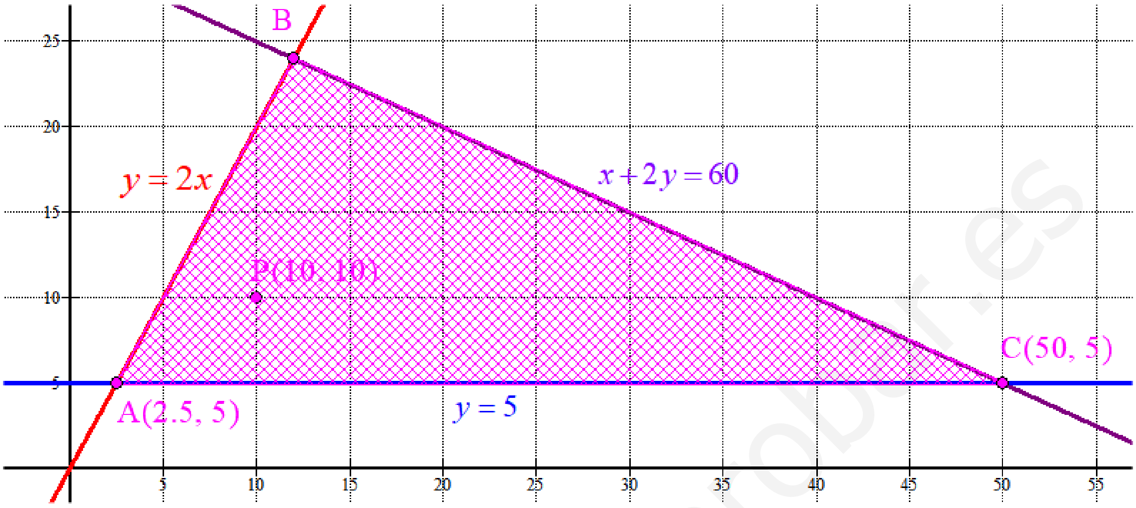
$y=2x$

x	$y=2x$
0	0
15	30



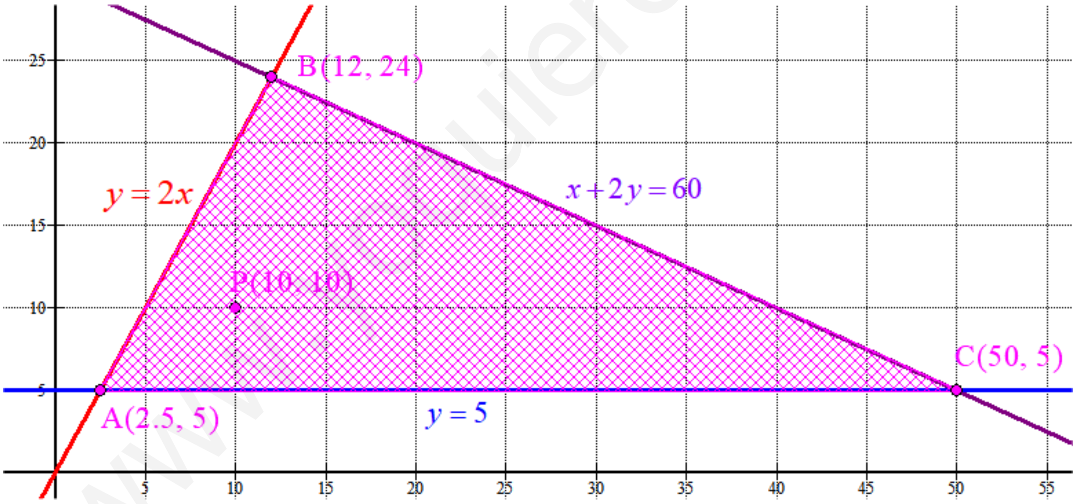
Comprobamos si el punto P(10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+20\leq 60 \\ 10\geq 5 \\ 10\leq 20 \\ 10\geq 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas las restricciones, la región factible es la zona rayada.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice B. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas respectivas.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=60 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=60 \Rightarrow 5x=60 \Rightarrow \boxed{x=12} \Rightarrow \boxed{y=2\cdot 12=24}$$



¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo? El punto (15, 15) pertenece a la región factible y puede darse esa posibilidad, pero no sería una solución óptima al ser interior y no estar en los límites de la región.

b) Deseamos maximizar los beneficios que vienen expresados en función del número de mesas como $B(x,y)=20x+25y$. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región.

A(2.5,5) → $B(2.5,5)=50+125=175$

B(12, 24) → $B(12,24)=240+600=840$

C(50, 5) → $B(50,5)=1000+125=1125$

Se obtienen un máximo beneficio en C(50, 5). Con 50 mesas altas y 5 bajas se obtiene un beneficio máximo, siendo este de 1125 €.

www.yoquieroaprobar.es

2A. Dada la función $f(x)=\dfrac{a}{x+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de *a* que verifica que *F(0) = 0* y *F(1) = 10 · ln(2)*, donde *F* denota una primitiva de *f*.

b) **[2 puntos]** Suponiendo que *a = 10*, estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje *X* entre *x = −3* y *x = −2*.

a) Hallamos primero la primitiva de $f(x)=\dfrac{a}{x+1}$.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{a}{x+1}dx=a\int \frac{1}{x+1}dx=a\ln|x+1|+C$$

Aplicamos que *F(0) = 0* y *F(1) = 10 · ln(2)*.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=a\ln|x+1|+C \\ F(0)=0 \\ F(1)=10\ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\ln|0+1|+C=0 \\ a\ln|1+1|+C=10\ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{C=0} \\ a\ln 2+C=10\ln 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\ln 2=10\ln 2 \Rightarrow \boxed{a=10}$$

b) Siendo *a = 10* la función queda $f(x)=\dfrac{10}{x+1}$.

Su dominio es $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Vemos sus asíntotas:

Asíntota vertical. $x=-1$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x+1}=\frac{10}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Asíntota oblicua. No tiene

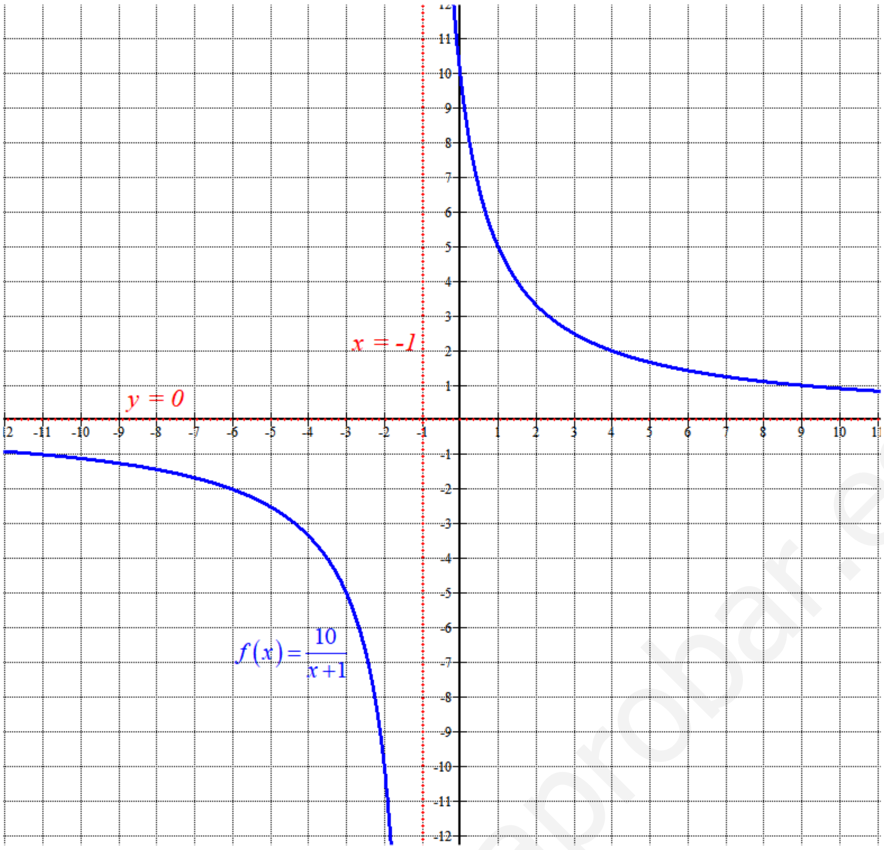
La derivada de la función es $f'(x)=\dfrac{0-10}{(x+1)^2}=\dfrac{-10}{(x+1)^2}$. Esta expresión siempre es negativa, por lo que la función siempre decrece.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

$$f(x)=\frac{10}{x+1}$$

x	$y=\dfrac{10}{x+1}$
−5	−2.5
−3	−5
−2	−10
0	10
1	5
3	2.5

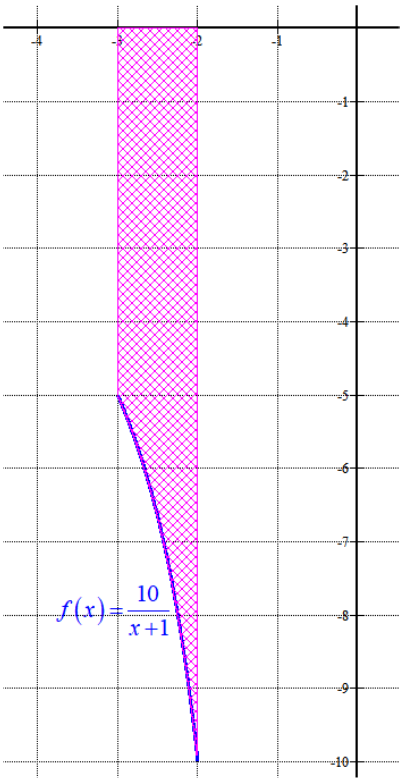
www.yoquieroaprobar.es



Dibujamos la región limitada por la función y el eje OX en el intervalo $[-3,-2]$.

$f(x)=\frac{10}{x+1}$

x	$y=\frac{10}{x+1}$
-3	$\frac{10}{-3+1}=-5$
-2.5	$\frac{10}{-2.5+1}=-6,66$
-2	$\frac{10}{-2+1}=-10$



Contando los cuadraditos de la zona rosada del dibujo de la gráfica el área vale entre 6 y 7 unidades cuadradas.

Hallamos su valor exacto haciendo uso de integrales.

$$\int_{-3}^{-2}\frac{10}{x+1}dx=\left[10\ln(x+1)\right]_{-3}^{-2}=\left[10\ln|-2+1|\right]-\left[10\ln|-3+1|\right]=10\ln 1-10\ln 2=-10\ln 2$$

$$Área=\left|\int_{-3}^{-2}\frac{10}{x+1}dx\right|=\boxed{10\ln 2=6,93\,u^2}$$

www.yoquieroaprobar.es

2B. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por *f (x)* el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado *x* toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}\left(-x^2+100x-1600\right)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\frac{120}{x}$ millones de euros.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función *f* en el intervalo $[0,\infty)$.

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

a) La función es una función definida a trozos.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{900}\left(-x^2+100x-1600\right) & si\ 0\le x\le 100\\ 1-\frac{120}{x} & si\ x>100\end{cases}$$

El primer trozo de función es un trozo de parábola, localizamos el vértice.

$$f(x)=\frac{1}{900}\left(-x^2+100x-1600\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{900}\left(-2x+100\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{1}{900}\left(-2x+100\right)=0\Rightarrow -2x+100=0\Rightarrow x=50$$

Como la segunda derivada es $f''(x)=\frac{1}{900}(-2)=-\frac{1}{450}<0$ entonces es un máximo y la parábola es convexa (∪).

El segundo trozo es una curva con discontinuidad en *x* = *0*, pero no está en el intervalo de definición.
Calculamos su derivada y estudiamos su comportamiento.

$$f(x)=1-\frac{120}{x}\Rightarrow f'(x)=0+\frac{120}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{120}{x^2}$$

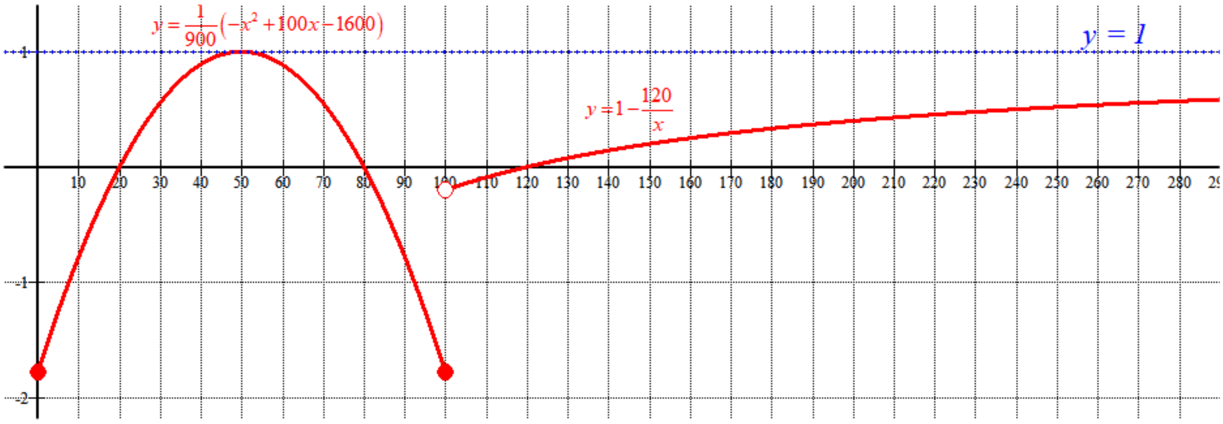
La derivada siempre es positiva, por lo que la función en este intervalo $[100,+\infty)$ crece.
Veamos el comportamiento de esta rama en el ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{120}{x}\right)=1-\frac{120}{\infty}=1 \quad \text{Tiene una asíntota horizontal en } y=1.$$

Hacemos una tabla de valores.

x	$y=\frac{1}{900}\left(-x^2+100x-1600\right)$
0	$-1,777$
20	0
50	1
80	0
100	$-1,77$

x	$y=1-\frac{120}{x}$
100	$-1,2$ No se incluye
120	0
150	0,2
200	0,4
1000	0,88



b) Observando la gráfica se puede responder a las preguntas planteadas.
Para maximizar el beneficio deben fabricarse 50 toneladas. Y ese beneficio máximo es 1 millón de euros.
Para que el beneficio sea positivo la gráfica debe estar por encima del eje de abscisas y eso ocurre entre 20 y 80 toneladas y de 120 en adelante.
Estos valores se obtienen igualando los dos trozos a cero y viendo cuando es positivo el beneficio.

$$\frac{1}{900}\left(-x^2+100x-1600\right)=0 \Rightarrow -x^2+100x-1600=0$$

$$x=\frac{-100\pm\sqrt{100^2-4(-1)(-1600)}}{-2}=\frac{-100\pm\sqrt{10000-2400}}{-2}=$$

$$=\frac{-100\pm\sqrt{3600}}{-2}=\begin{cases}\frac{-100+60}{-2}=20=x\\ \frac{-100-60}{-2}=80=x\end{cases}$$

En un valor entre 20 y 80, por ejemplo $x = 50$ toma el valor $\frac{1}{900}\left(-50^2+100\cdot 50-1600\right)=1>0$.

La parábola (beneficio entre 0 y 100 toneladas) es positiva entre 20 y 80.

El beneficio a partir de 100 toneladas es 0 cuando $1-\frac{120}{x}=0 \Rightarrow \frac{120}{x}=1 \Rightarrow x=120$

Esta parte de la función es positiva a partir de 120 toneladas.

www.yoquieroaprobar.es

3A. El 20% de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80% restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6% fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12% fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

Construyamos una tabla de contingencia.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores			20
No estudios superiores			80
			100

El 6% de los 20 trabajadores con estudios superiores fuma, esto es 0,06 · 20 = 1,2 de los 20.

Como este número es decimal modificamos la tabla poniendo 1000 trabajadores en lugar de 100.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores			200
No estudios superiores			800
			1000

Ahora el 6% de los 200 trabajadores con estudios superiores fuma, esto es 0,06 · 200 = 12 de los 200 fuma.
Y el 12% del total fuma, esto es 0,12 · 1000 = 120.
Añadimos estos datos a la tabla.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores	12		20
No estudios superiores			80
	120		1000

La completamos aplicando la regla de que cada línea debe sumar el resultado final de la misma.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores	12	188	200
No estudios superiores	108	692	800
	120	880	1000

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

a) Hay 120 trabajadores que fuman y de ellos 12 tienen estudios superiores.
El porcentaje de trabajadores fumadores que tienen estudios superiores es

$$\frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = \boxed{10\%}$$

b) Hay 800 trabajadores sin estudios superiores y de ellos fuman 108, el porcentaje de fumadores dentro de los trabajadores sin estudios superiores es

$$\frac{108}{800} = \frac{27}{200} = 0{,}135 = \boxed{13{,}5\%}$$

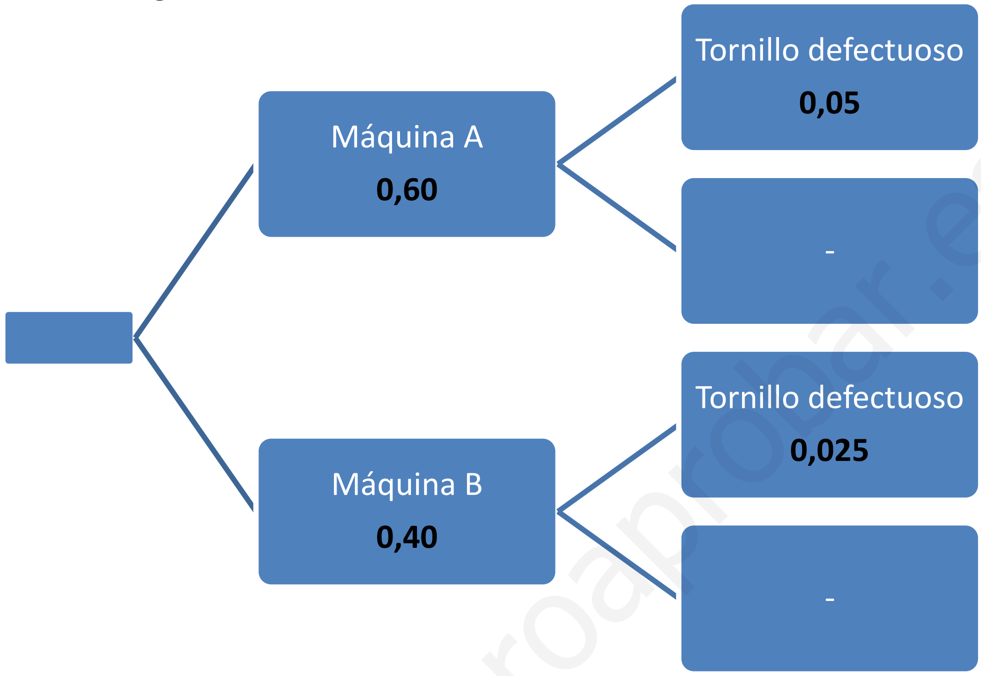
www.yoquieroaprobar.es

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60% de las veces la máquina *A* y el 40% restante la *B*. La máquina *A* produce un 5% de tornillos defectuosos y la *B* un 2,5%.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina *B*.

Realicemos un diagrama de árbol.



a) Este suceso ocurre de dos formas posibles cuya probabilidad aparece en dos de las ramas del diagrama de árbol.

$$P(\textit{tornillo defectuoso}) = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,025 = 0,030 + 0,0100 = \boxed{0,04}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea de la máquina B / Es defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea de la máquina B} \cap \text{Es defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,025}{0,04} = \frac{0,01}{0,04} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25}$$

4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros. +

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90% de confianza.

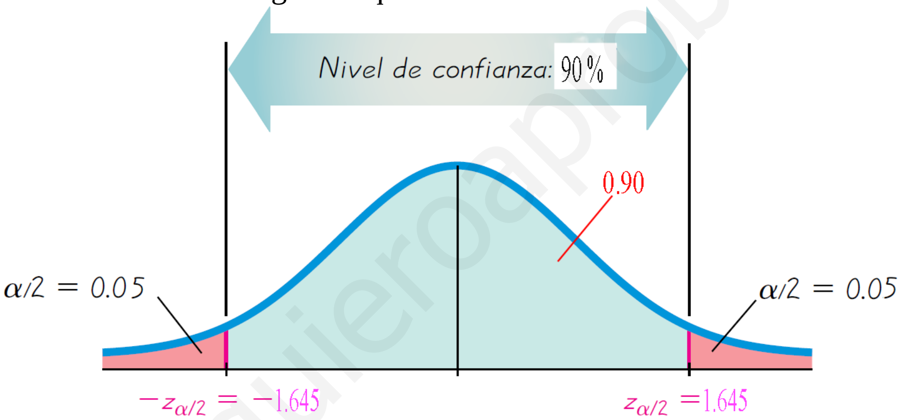
b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90%?

Sea X = Precio medio de un producto.

X = N(μ, 5.5)

$\bar{x} = 36$ €; $n = 40$

a) El nivel de confianza del 90% significa que



$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,645 \cdot \frac{5,5}{\sqrt{40}} = 1,43 \text{ €}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (36 - 1.43, 36 + 1,43)$$

El intervalo de confianza es $(34.57, 37.43)$

b) Con el mismo nivel de confianza del 90 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.645$.

El nuevo error es del 1.5, lo sustituimos en la fórmula y despejamos la “n”.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.645 \cdot \frac{5.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot \frac{5.5}{1.5} \Rightarrow n = \left(1.645 \cdot \frac{5.5}{1.5}\right)^2 = 36.38$$

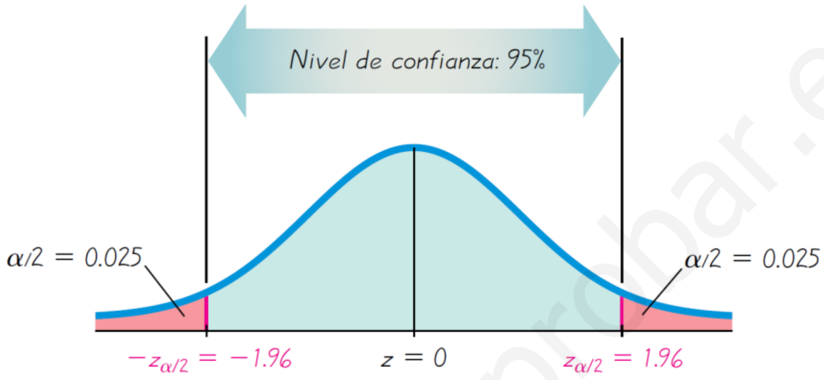
A partir de 37 comercios se consigue la confianza pedida en el problema

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.⁺

a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

Conocemos n = 500 $\quad p=\frac{190}{500}=\frac{380}{1000}=\frac{38}{100}=0'38 \qquad 1-p=1-0'38=0'62$

El error sigue la fórmula $Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'38\cdot 0'62}{500}} = 0'0425$

La fórmula del intervalo de confianza es $\left(p-Error,\quad p+Error\right)$ y al 95 % de confianza y con los datos del ejercicio sería:

$$\left(0'38-0'0425,\quad 0'38+0'0425\right)=\left(0'3375,\, 0'4225\right)$$

Con una probabilidad del 95% la proporción de individuos de la población que leen habitualmente el periódico está entre un $\boxed{\text{33,75 \% y un 42,25 \%.}}$

b) Si mantenemos el nivel de confianza que nos da $z_{\alpha/2}$ = **1,96** y la proporción muestral es la misma $p=0'38$, a su vez tenemos el mismo valor de $1-p=0'62$ y en la fórmula del error $Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'38\cdot 0'62}{n}}$ disminuimos la muestra (n) entonces aumenta $\frac{0'38\cdot 0'62}{n}$ y el Error también se hace más grande.

A menor tamaño muestral es mayor el Error de la estimación.