Física

Unidad didáctica 1

Interacción gravitatoria

SOLUCIONES UNIDAD 1. INTERACCIÓN GRAVITATORIA

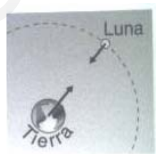
CUESTIONES INICIALES

1. ¿De que formas se ha explicado la posición de la Tierra en el Universo a lo largo del tiempo?

Según el modelo geocéntrico, la Tierra está inmóvil y situada en el centro del Universo. Los astros giran en torno a ella con movimiento circular uniforme.

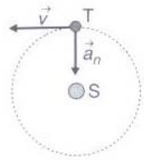
En el modelo heliocéntrico, es el Sol el que está situado en el centro del Sistema Solar y la Tierra, junto a los planetas, giran a su alrededor.

2. Representa en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el sistema formado por la Tierra y por la Luna.



Las dos fuerzas tienen el mismo módulo y la misma dirección y sus sentidos son opuestos, pues son un par de fuerzas de acción y reacción.

3. El Sol está situado a una distancia media de 150 millones de km. ¿Cuál es la velocidad y aceleración media de la Tierra en torno al Sol? Representa los vectores anteriores sobre la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol.



a) La velocidad de traslación de la Tierra es:

$$v = \frac{2\cdot\pi\cdot R}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot 150\cdot 10^9\ \text{m}}{365\ \text{días}\cdot 24\ \text{h/día}\cdot 3\ 600\ \text{s/h}} = 29\ 886\ \text{m/s}$$

Su dirección es la de la tangente a la trayectoria y su sentido el del movimiento.

El movimiento únicamente posee aceleración normal, ya que sólo se modifica la dirección del vector velocidad.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(29\ 886\ \text{m/s})^2}{150\cdot 10^9\ \text{m}} = 5{,}9\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Su dirección es la de la recta que une los centros de los astros y su sentido hacia el Sol.

ACTIVIDADES FINALES

1. Si se descubriera un planeta situado a una distancia del Sol diez veces mayor que la distancia a la que se encuentra la Tierra, ¿Cuántos años terrestres tardaría en recorrer su órbita?

Aplicando la tercera ley de Kepler: $\frac{T^2_{Tierra}}{R^3_{Tierra}} = \frac{T^2_{Planeta}}{R^3_{Planeta}}$

Sustituyendo: $\frac{(1\ \text{año})^2}{(1\ \text{U.A.})^3} = \frac{T^2_{Planeta}}{(10\ \text{U.A.})^3} \Rightarrow T_{Planeta} = 31{,}62\ \text{años terrestres}$

2. Calcula la masa del Sol sabiendo que la constante de la tercera ley de Kepler para los planetas del sistema solar tiene el valor de $3{,}35\cdot 10^{18}$ m^3/s^2.

La tercera ley de Kepler también se puede expresar como: $\frac{r^3}{T^2} = 3{,}35\cdot 10^{18}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$

Para calcular la masa del astro central se aplica la segunda ley de Newton al movimiento circular del planeta:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n; \frac{G\cdot M_{astro}\cdot m_{planeta}}{r^2} = m_{planeta}\cdot\frac{v^2}{r}; \frac{G\cdot M_{astro}}{r} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^2}{T^2}$$

Despejando: $M_{sol} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\cdot\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2}\cdot 3{,}35\cdot10^{18}\,\frac{m^3}{s^2} = 1{,}98\cdot10^{30}\,kg$

3. La masa de Júpiter es 318 veces la de la Tierra, su radio medio es 10,85 veces el terrestre y su distancia media al Sol es 5,2 veces la de la Tierra. Con estos datos calcula el período orbital en torno al Sol en relación a un año terrestre y el valor de la gravedad en su superficie en relación al de la Tierra.

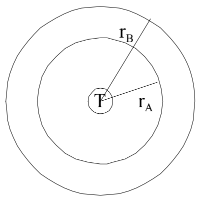
El período de Júpiter se calcula aplacando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_J^2}{r_J^3}; \frac{1\,año^2}{r_T^3} = \frac{T_J^2}{(5{,}2\cdot r_T)^3} \Rightarrow T_J = 11{,}86\,años$$

La expresión de la aceleración de la gravedad en la superficie de un astro es:

$$g_J = G\frac{M_J}{R_J^2} = G\frac{318\cdot M_T}{(10{,}85\cdot R_T)^2} = \frac{318}{10{,}85^2}\frac{G\cdot M_T}{R_T^2} = 2{,}7\cdot g_{0,T} = 26{,}5\,m/s^2$$

4. Dos satélites de comunicaciones A y B ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio ($R_A < R_B$). Se pide: a))Cuál de los dos se moverá con mayor velocidad lineal? b) ¿Cuál de los dos tendrá mayor período de revolución?



Aplicando la segunda ley de Newton a un satélite que gira en torno a la Tierra en una órbita de radio r, resulta que la relación entre la velocidad y el radio de la órbita es:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n; \frac{G\cdot m_T\cdot m_s}{r^2} = m_s\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot m_T}{r}}$$

De lo que se deduce que cuanto pequeño es el radio de la órbita más deprisa se mueve el satélite $v_A > v_B$.

Aplicando la tercera ley de Kepler a los dos satélites, resulta que: $\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \Rightarrow T_A^2\cdot r_B^3 = T_B^2\cdot r_A^3$

De donde se deduce que si $r_B > rA$ entonces $T_A < T_B$, es decir que cuanto menor es el radio de la órbita menos tiempo se tarda en recorrerla, por lo que: $T_A < T_B$.

5. Dos satélites de igual masa orbitan en tomo a un planeta de masa mucho mayor siguiendo órbitas circulares coplanarias de radios R y 3 · R y recorriendo ambos las órbitas en sentidos contrarios. Calcula la relación entre sus periodos y entre sus momentos angulares (módulo, dirección y sentido).

a) Sea A el satélite que sigue la órbita de menor radio y B el de la de mayor radio. Los períodos de los satélites y los radios de sus órbitas están relacionados por la tercera ley de Kepler.

$$\frac{T_A^2}{R_A^3} = \frac{T_B^2}{R_B^3}; \frac{T_A^2}{R^3} = \frac{T_B^2}{(3\cdot R)^3}; \frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{R^3}{27\cdot R^3} \Rightarrow T_B = \sqrt{27}\cdot T_A = 3\cdot\sqrt{3}\cdot T_A$$

b) El momento angular de un satélite respecto del planeta es: $\vec{L} = \vec{r}\,x\,m\cdot\vec{v}$ es un vector perpendicular al plano de la órbita y su sentido está determinado por la regla de Maxwell.

Su módulo es: L = r · m · v · sen φ y como la órbita es circular, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} L = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\,90^\circ \\ v = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \end{array}\right\} L = 2 \cdot \pi \cdot m \frac{r^2}{T}$$

Como las órbitas son coplanarias la dirección de los dos momentos angulares es la misma, la de la perpendicular al plano de la órbita. Al recorrer las órbitas en sentidos contrarios, los sentidos de los momentos angulares son opuestos.

La relación entre los módulos, como tienen la misma masa, es: $\dfrac{L_A}{L_B} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot m_A \dfrac{r_A^2}{T_A}}{2 \cdot \pi \cdot m_B \dfrac{r_B^2}{T_B}} = \dfrac{R_A^2 \cdot T_B}{R_B^2 \cdot T_A}$

Sustituyendo: $\dfrac{L_A}{L_B} = \dfrac{R^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot T_A}{(3 \cdot R)^2 \cdot T_A} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. Se tienen dos satélites iguales, de la misma masa, uno gira en una órbita circular alrededor de la Tierra y el otro en torno a Marte. ¿Cuál es la relación entre los radios de las órbitas si ambos tienen en mismo período? Su pongamos ahora que los dos satélites giran en órbitas del mismo radio, cada uno alrededor de su planeta. ¿Cuál es la relación entre los momentos angulares correspondientes? Datos: $m_{Marte} = 0{,}11 \cdot m_{Tierra}$; $R_{Marte} = 0{,}5 \cdot R_{Tierra}$

Sobre los satélites actúa la interacción gravitatoria con su planeta correspondiente. Aplicando la segunda ley de Newton y como las órbitas son circulares, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m_S \cdot \vec{a}_n; G \frac{m_P \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_P}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita es: $r = \sqrt[3]{\dfrac{G \cdot m_P \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$

La relación entre sus radios orbitales, como sus períodos son iguales es:

$$\frac{r_{Tierra}}{r_{Marte}} = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{G \cdot m_{Tierra} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{G \cdot m_{Marte} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{m_{Tierra}}{0{,}11 \cdot m_{Tierra}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}11}} = 2{,}09 \Rightarrow r_{Tierra} = 2{,}09 \cdot r_{Marte}$$

El módulo del momento angular de un satélite respecto del planeta es: L = r · m · v

La velocidad orbital es: $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_{planeta}}{r}}$

Los radios de las órbitas son iguales y la relación entre los módulos de los momentos angulares es:

$$\frac{L_{Tierra}}{L_{Marte}} = \frac{r \cdot m_{satélite} \cdot v_{Tierra}}{r \cdot m_{satélite} \cdot v_{Marte}} = \frac{\sqrt{\dfrac{G \cdot m_{Tierra}}{r}}}{\sqrt{\dfrac{G \cdot m_{Marte}}{r}}} = \sqrt{\frac{m_{Tierra}}{0{,}11 \cdot m_{Tierra}}} = 3{,}02 \Rightarrow L_{Tierra} = 3{,}02 \cdot L_{Marte}$$

7. Un planeta describe una órbita circular de radio 1 A 10^8 km con un período de rotación 2 años en torno a una estrella de masa mucho mayor. Calcula la masa de la estrella.

La masa del astro central se aplica aplicando la dinámica del movimiento circular del planeta:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot M_{astro} \cdot m_{planeta}}{r^2} = m_{planeta} \cdot \frac{v^2}{r}; \frac{G \cdot M_{astro}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando:

$$M_{astro} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(1\cdot 10^{11}\,m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot(2\,años\,365\,días/año\cdot 24\,h/día\cdot 3600\,s/h)^2} = 1{,}49\cdot 10^{29}\,kg$$

8. Europa, satélite de Júpiter, fue descubierto por Galileo en 1610. Sabiendo que el radio de la órbita que describe es de 6,7· 10^5 km y su período de 3 días, 13 horas y 13 minutos, calcula la velocidad de Europa relativa a Júpiter y la masa del planeta.

El período de Europa es: T 3 días 13 horas y 13 minutos = 3,07· 10^5 s

La velocidad orbital del satélite es: $v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T} = \frac{2\cdot\pi\cdot 6{,}7\cdot 10^8\,m}{3{,}07\cdot 10^5\,s} = 1{,}37\cdot 10^4\,m/s$

Para calcular la masa del astro central se aplica la segunda ley de Newton al movimiento circular del planeta:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n; \frac{G\cdot M_{astro}\cdot m_{planeta}}{r^2} = m_{planeta}\cdot\frac{v^2}{r}$$

Despejando: $M_{astro} = \frac{v^2\cdot r}{G} = \frac{(1{,}37\cdot 10^4\,m/s)^2\cdot 6{,}7\cdot 10^8\,km}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2} = 1{,}9\cdot 10^{27}\,kg$

9. El diámetro de la Luna es la cuarta parte del de la Tierra y su masa es 1/81 de la masa de la Tierra.)Con qué velocidad llegará a la superficie de la Luna un objeto que se deja caer desde una altura de 5 m?

La relación entre los diámetros es la misma que entre los radios.

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es:

$$g = \frac{G\cdot m_L}{R_L^2} = G\frac{\frac{M_T}{81}}{\left(\frac{R_T}{4}\right)^2} = \frac{16}{81}\frac{G\cdot M_T}{R_T^2} = \frac{16}{81}g_{o,\,Tierra} = \frac{16}{81}\cdot 9{,}8\,m/s^2 = 1{,}9\,m/s^2$$

La velocidad que adquiere el objeto en la superficie de la Luna es:

$$v = \sqrt{2\cdot g\cdot h} = \sqrt{2\cdot 1{,}9\,m/s^2\cdot 5\ m} = 4{,}4\,m/s$$

10. Supón que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. ¿Aumentaría el valor de la aceración de la gravedad en su superficie? ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie es: $g' = \frac{G\cdot M}{r'^2} = \frac{G\cdot M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4G\cdot M}{r^2} = 4\cdot g_{0,\,Tierra}$

Como la masa permanece constante y se considera localizada en el centro de la Tierra, la fuerza gravitatoria con la que interacciona con el Sol no se modifica y por tanto la órbita no sufre ninguna alteración.

11. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Mercurio sabiendo que el radio de Mercurio es igual a la tercera parte del radio terrestre y que la densidad de Mercurio es 3/5 de la densidad de la Tierra.

Aplicando la relación entre las densidades se cumple que:

$$\rho_M = \frac{3}{5}\rho_T;\ \frac{M_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3} = \frac{3}{5}\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow M_M = \frac{3}{5}\frac{M_T \cdot R_M^3}{R_T^3}$$

Aplicando la relación entre los radios: $R_T = 3$ A R_M, se tiene que la relación de las masas es:

$$M_M = \frac{3}{5}\frac{M_T \cdot R_M^3}{(3 \cdot R_M)^3} = \frac{1}{45}M_T$$

Aplicando la segunda ley de Newton, la aceleración de la gravedad en la superficie de mercurio es:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} = \frac{G\frac{1}{45}M_T}{\left(\frac{1}{3}R_T\right)^2} = \frac{9}{45}g_{tierra} = \frac{1}{5}9{,}8\,m/s^2 = 2\,m/s^2$$

12. La aceleración de la gravedad en un planeta es 5 m/s². Si su radio es igual a la mitad del radio terrestre, calcula la relación de su masa con la masa de la Tierra.

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$

Comparando sus valores en los planetas, resulta que: $\frac{g_{Planeta}}{g_{Tierra}} = \frac{\frac{G \cdot M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}}{\frac{G \cdot M_{Planeta}}{R_{Planeta}^2}} = \frac{M_{Tierra} \cdot R_{Planeta}^2}{M_{Planeta} \cdot R_{Tierra}^2}$

Operando: $\frac{M_{Planeta}}{M_{Tierra}} = \frac{g_{Tierra} \cdot R_{Planeta}^2}{g_{Planeta} \cdot R_{Tierra}^2} = \frac{5\,m/s^2 \cdot \left(\frac{R_{Tierra}}{2}\right)^2}{9{,}8\,m/s^2 \cdot R_{Tierra}^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow M_{Planeta} = \frac{1}{8}M_{Tierra}$

13. Un planeta de forma esférica tiene un radio de 3000 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s². Calcula su densidad media.

La aceleración en su superficie es: $g = \frac{G \cdot m}{R^2} \Rightarrow m = \frac{g \cdot R^2}{G}$

La densidad es: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{g \cdot R^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} = \frac{3 \cdot g}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot G} = \frac{3 \cdot 6\,m/s^2}{4 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^6\,m \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2} = 7158\,kg/m^3$

14. Un cuerpo de masa 100 kg está situado en la superficie de la Tierra. ¿Cuál es su peso? Si se duplicara el radio de la Tierra, manteniendo la masa de ésta, ¿cuál sería entonces el peso del cuerpo? Si se duplicara el radio de la Tierra, manteniendo constante su densidad media, ¿cuál sería en tal caso el peso del objeto?

El peso en la superficie de la Tierra es: $P = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = m \cdot g = 100\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = 980\,N$

Al duplicar el radio y con la misma masa de la Tierra, se tiene que el peso sería:

$$P_1 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{(2 \cdot R)^2} = \frac{P}{4} = \frac{980\,N}{4} = 245\,N$$

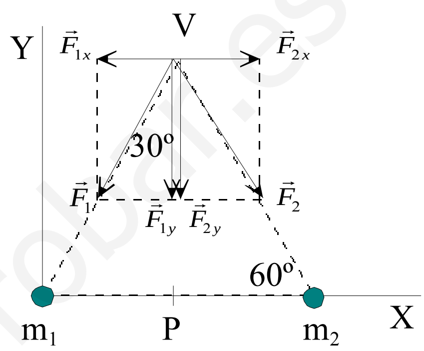
Como la densidad permanece constante, se tiene que la masa M' de la Tierra es:

$$\rho = \rho'; \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'}; \Rightarrow M' = M\frac{V'}{V} = M\frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R'^3}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3} = M\frac{(2\cdot R)^3}{R} = M\cdot 8$$

Y el peso del objeto es: $P_2 = \frac{G\cdot M'\cdot m}{r^2} = \frac{G\cdot 8\cdot M\cdot m}{(2\cdot R)^2} = 2\cdot P = 2\cdot 980N = 1960N$

15. En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado hay colocadas sendas masas de 3 kg cada una. Calcula el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza con la que actúan sobre otra masa de 5 kg colocada en el otro vértice.

Se elige un sistema de referencia con el lado del triángulo que contiene las masas sobre el eje X y en el origen una de ellas. Se denominan m_1 y m_2 a las dos masas iguales y m a la otra masa.



Las dos masas iguales actúan sobre la masa desigual con fuerzas del mismo módulo.

$$F_1 = F_2 = \frac{G\cdot m_1\cdot m}{r_1^2} = \frac{G\cdot 3kg\cdot 5kg}{1m^2}$$

Las componentes en el eje X de las fuerzas anteriores se anulan por simetría y las componentes en el eje Y se refuerzan.

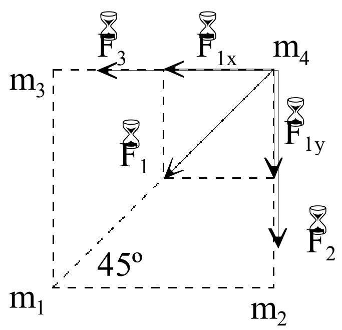
Como los ángulos de un triángulo equilátero son de 60º, resulta que la fuerza que actúa sobre la masa desigual es:

$$F_T = 2\cdot F_{1y} = 2\frac{G\cdot 3kg\cdot 5kg}{1m^2}\cdot sen\,60° = 2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot 3kg\cdot 5kg}{1m^2}\cdot sen\,60° = 1{,}73\cdot 10^{-9}\ N$$

Vectorialmente: $\vec{F}_t = -1{,}73\cdot 10^{-9}\cdot\vec{j}\,N$

16. Tres masas puntuales de 1 kg están situadas en tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado.)Qué fuerza actúa sobre una cuarta masa de 1 kg colocada en el otro vértice?

Se elige un sistema de referencia con la masa m_1 colocada en el punto (0, 0), la m_2 situada en (1, 0), la m_3 puesta en (0,1) y la m_4 localizada en (1, 1) y sobre la que se calculará la fuerza resultante.



Aplicando la ley de Gravitación Universal y si L es la longitud del lado del cuadrado, resulta que las expresiones de las fuerzas con que actúan las respectivas masas con la masa m_4 son:

$$\vec{F}_2 = \frac{G\cdot m_2\cdot m_4}{r_{24}^2}(-\ \vec{j}) = -\frac{G\cdot m^2}{L^2}\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{G\cdot m_3\cdot m_4}{r_{34}^2}(-\ \vec{i}) = -\frac{G\cdot m^2}{L^2}\vec{i}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{G\cdot m_1\cdot m_4}{r_{14}^2}\left[\cos\varphi(-\ \vec{i}) + sen\,\varphi(-\ \vec{j})\right] = \frac{G\cdot m^2}{(\sqrt{2}\cdot L)^2}\left[-\cos 45\cdot\vec{i} - sen\,45\cdot\vec{j}\right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\cdot G\cdot m^2}{4\cdot L^2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}\cdot G\cdot m^2}{4\cdot L^2}\vec{j}$$

Sumando, las componentes de la fuerza resultante son:

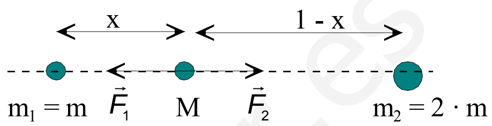
$$\vec{F}_x = \vec{F}_3 + \vec{F}_{1x} = -\frac{G \cdot m^2}{L^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right]\vec{i} \quad ; \quad \vec{F}_y = \vec{F}_2 + \vec{F}_{1y} = -\frac{G \cdot m^2}{L^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right]\vec{j}$$

La fuerza total es: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = -\frac{G \cdot m^2}{L^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right](\vec{i} + \vec{j})$

Sustituyendo: $\vec{F} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2 \cdot 1\ kg^2}{1\ m^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right](\vec{i} + \vec{j}) = -9{,}02 \cdot 10^{-11}(\vec{i} + \vec{j})\,N$

17. Dos puntos materiales de masas m y 2 m respectivamente, se encuentran la una distancia de 1 m. ¿Dónde habrá que colocar otra masa para que esté en equilibrio?

Sea las partículas: $m_1 = m$, $m_2 = 2 \cdot m$ y M la masa en equilibrio.



La masa M estará en equilibrio cuando los módulos de las fuerzas con las que interacciona con las otras masas sean iguales.

$$F_1 = F_2; \frac{G \cdot M \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot M \cdot m_2}{r_2^2}; \quad \frac{m}{x^2} = \frac{2 \cdot m}{(1-x)^2}$$

Operando: $(1 - x)^2 = 2 \cdot x^2$; $x^2 + 2 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0{,}41$ m de la masa menos

18. La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. Si la masa de la Tierra es $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg calcula la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna. ¿Cuál es el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de $3{,}4 \cdot 10^8$ m?

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m_S \cdot \vec{a}_n; \ G\frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que la distancia entre sus centros es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\,kg \cdot (2{,}42 \cdot 10^6\,s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 3{,}9 \cdot 10^8\,m$$

En ese punto se igualan las fuerzas de interacción gravitatoria con la Tierra y con la Luna.

Como $d_T = 3{,}4 \cdot 10^8$ m y $d_L = d - d_T = 3{,}9 \cdot 10^8\ m - 3{,}4 \cdot 10^8\ m = 0{,}5 \cdot 10^8$ m, resulta que:

$$\frac{GM_T \cdot m}{d_T^2} = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{d_L^2}; \ M_L = \frac{M_T \cdot d_L^2}{d_T^2} = 6{,}4 \cdot 10^{24}\,kg\frac{(0{,}5 \cdot 10^8)^2}{(3{,}4 \cdot 10^8)^2} = 1{,}38 \cdot 10^{23}\,kg$$

19. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa mucho mayor. La distancia más próxima es $R_{Próximo}$ = 1 A 10^8 km y la más alejada es $R_{Alejado}$ = 1,8 A 10^8 km. Calcula la relación entre las velocidades del planeta en los puntos más próximo, P, y más alejado, A.

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular del planeta respecto del astro central permanece constante a lo largo de la trayectoria en módulo, dirección y sentido.

Por tanto: $\vec{L}_P = \vec{L}_A$; $\vec{r}_P \times m \cdot \vec{v}_P = \vec{r}_A \times m \cdot \vec{v}_A \Rightarrow$ r_P A v_P = r_A A v_A

La relación entre las velocidades en los puntos P y A es: $\frac{v_p}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1{,}8 \cdot 10^8 \text{ km}}{1 \cdot 10^8 \text{ km}} = 1{,}8$

20. Dos satélites, A y B, giran alrededor de un planeta siguiendo órbitas circulares de radios 2 · 10^8 y 8 · 10^8 m, respectivamente. Calcula le relación entre sus velocidades tangenciales respectivas.

La fuerza de interacción gravitatoria es la que permite a los satélites describir un movimiento circular en torno al astro central. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular, se tiene:

$$\vec{F}_{gravitatoria} = m \cdot \vec{a}_n ; \frac{G \cdot m_{astro} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2_{satélite}}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{astro}}{r}}$$

Aplicando esta relación a cada satélite y operando, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{G \cdot m_{astro}}{r_A}} \\ v_B &= \sqrt{\frac{G \cdot m_{astro}}{r_B}} \end{aligned}\right\} : \frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{\frac{G \cdot m_{astro}}{r_A}}}{\sqrt{\frac{G \cdot m_{astro}}{r_B}}} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^8 \text{ m}}{2 \cdot 10^8 \text{ m}}} = 2 \Rightarrow v_A = 2 \cdot v_B$$

21. La nave espacial del primer vuelo tripulado chino orbitó la Tierra a una distancia de 330 km de su superficie. Calcula el período orbital de la nave y su velocidad en la órbita, supuesta circular.

radio de la órbita es: r = R_T + 330 km = 6370 A 10^3 m + 330 A 10^3 m = 6,70 A 10^6 m

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m_S \cdot \vec{a}_n ; G\frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que el período es:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R_T^2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{(6{,}70 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}} = 5{,}5 \text{ A } 10^3 \text{ s} = 91 \text{ min}$$

La velocidad orbital es: $v = \frac{2 \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \pi \cdot 6{,}70 \cdot 10^6 \text{ m}}{5{,}5 \cdot 10^3 \text{ s}}$ = 7,65 A 10^3 m/s

22. Un satélite artificial describe una órbita circular de radio 2 · R_{Tierra} en torno a la Tierra. Calcula su velocidad orbital y el peso del satélite en la órbita si en la superficie de la Tierra pesa 5 000 N. Dato: R_{Tierra} = 6400 km

La fuerza de interacción gravitatoria es la que permite al satélite describir un movimiento circular en torno al astro central.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n ; \frac{G \cdot m_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2_{satélite}}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{Tierra}}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{Tierra}}{2 \cdot R_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{Tierra} \cdot R_{Tierra}}{2 \cdot R^2_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m}}{2}} = 5600 \text{ m/s}$$

El peso del satélite en la órbita es la interacción gravitatoria con la Tierra. Relacionando el peso en la órbita con el peso en la superficie de la Tierra.

$$\frac{P_{orbita}}{P_{sup\,erfice}} = \frac{\dfrac{G \cdot m_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r^2}}{\dfrac{G \cdot m_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{R^2_{Tierra}}} = \frac{R^2_{Tierra}}{(2 \cdot R_{Tierra})^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_{orbita} = \frac{1}{4} P_{sup\,erfice} = \frac{5000\,N}{4} = 1250\,N$$

23. La distancia Tierra-Luna es aproximadamente 60 RT, siendo RT el radio de la Tierra, igual a 6 400 km. Calcula la velocidad lineal de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra y el correspondiente período de rotación en días. La masa de la Tierra es: 5,98 ·1024 kg

Sobre la Luna actúa la interacción gravitatoria. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular de la Luna:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \frac{G \cdot m_{Tierra} \cdot m_{Luna}}{r^2} = m_{Luna} \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{Tierra}}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{60 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\,m}} = 993\,m/s$$

El período del movimiento es: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\,m}{993\,m/s} = 2{,}43 \cdot 10^6\,s = 28\,días$

24. Una sonda espacial orbita en torno a Marte recorriendo una órbita completa cada 7,5 horas, siendo su masa 120 kg. Sabiendo que el radio del planeta Marte es de 3 390 km y que su masa es igual a $6{,}421 \cdot 10^{23}$ kg y suponiendo que la órbita es circular, calcula su radio y la velocidad con que la recorre la sonda. En realidad, esta sonda describe una órbita elíptica de forma que pueda aproximarse lo suficiente al planeta como para fotografiar su superficie. La distancia a la superficie marciana en el punto más próximo es de 258 km y de 11 560 km en el punto más alejado. Obtén la relación entre las velocidades de la sonda en estos dos puntos.

El período del movimiento es: T = 7,5 h = 7,5 h · 3 600 s/h = $2{,}7 \cdot 10^4$ s

a) Sobre la sonda espacial actúa la interacción gravitatoria con Marte que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para describir la trayectoria circular. Aplicando conjuntamente la ley de gravitación universal, la segunda ley de Newton y la relación entre el período del movimiento y su velocidad, resulta que:

$$\left.\begin{array}{r} \Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; \dfrac{G \cdot m_{Marte} \cdot m_{sonda}}{r^2} = m_{sonda} \dfrac{v^2}{r} \\ v = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \end{array}\right\} \frac{G \cdot m_{Marte}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando: $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_{Marte} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2 \cdot 6{,}421 \cdot 10^{23}\,kg \cdot (2{,}7 \cdot 10^4\,s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 9{,}25 \cdot 10^6\,m$

La velocidad con la que recorre la órbita es: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 9{,}25 \cdot 10^6\,m}{2{,}7 \cdot 10^4\,s} = 2{,}15 \cdot 10^3\,m/s$

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular de la sonda respecto de Marte es una cantidad constante a lo largo de la órbita.

$\vec{L}_{cerca} = \vec{L}_{lejos}$

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$r_{cerca} \cdot m_{sonda} \cdot v_{cerca} = r_{lejos} \cdot m_{sonda} \cdot v_{lejos} \Rightarrow \frac{v_{cerca}}{v_{lejos}} = \frac{r_{lejos}}{r_{cerca}} = \frac{11\,560\,km}{258\,km} = 44{,}81$

Lógicamente viaja más deprisa cuanto más cerca esté de la superficie de Marte, de acuerdo con la ley de las áreas.

25. En el año 1957 la extinta Unión Soviética lanzó al espacio el primer satélite artificial de la historia, el Sputnik 1. El satélite pesaba 83 kg y dio 1400 órbitas alrededor de la tierra con un período de 96,2 min. Calcula el momento angular del satélite respecto de la Tierra.

Para calcular el momento angular del satélite respecto de la Tierra hay que determinar el radio de la órbita y su velocidad. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m_S \cdot \vec{a}_n ; G\frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que el radio de órbita es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8\,m/s^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\,m)^2 \cdot (96{,}2 \cdot 60\,s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 6{,}95 \cdot 10^6\,m$$

La velocidad del satélite es la órbita es: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}95 \cdot 10^6\,m}{96{,}2 \cdot 60\,s} = 7{,}6 \cdot 10^3\,m/s$

El módulo del momento angular es:
$L = r \cdot m \cdot v = 6{,}95 \cdot 10^6\ m \cdot 83\ kg \cdot 7{,}6 \cdot 10^3\ m/s = 4{,}38 \cdot 10^{12}\ kg \cdot m^2/s$
De dirección la perpendicular al plano de la órbita y sentido el indicado por la regla de Maxwell.

26. Un satélite gira alrededor de la Tierra en una orbita circular de 20 000 km de radio. Si el radio de la Tierra es igual a 6370 km y la aceleración de la gravedad en su superficie 9,8 m/s², calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la órbita y la velocidad angular del satélite.

La relación entre la aceleración de la gravedad en la superficie y en la órbita es:

$$\frac{g_{orbita}}{g_0} = \frac{\frac{G \cdot M_{Tierra}}{r^2}}{\frac{G \cdot M_{Tierra}}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{r^2} \Rightarrow g_{órbita} = g_0\frac{R_T^2}{r^2} = 9{,}8\,m/s^2\,\frac{(6370\,km)^2}{(20000\,km)^2} = 0{,}99\,m/s^2$$

La aceleración de la gravedad en la órbita es la misma que la aceleración normal del movimiento circular del satélite.

$$g = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{0{,}99\,m/s^2}{20 \cdot 10^6\,m}} = 2{,}2 \cdot 10^{-4}\,m/s$$

27. Si la masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la Tierra y su período de rotación en torno a su eje es aproximadamente igual al de la Tierra, calcular el radio de la órbita de un satélite geoestacionario orbitando sobre el ecuador de Marte.

Para que un satélite sea geoestacionario su período de revolución tiene que ser el mismo que el de Marte, es decir, T = 24 h.

Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r, y como $v = \frac{2\,\pi \cdot r}{T}$, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n ; G\frac{m_M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_M}{r} = \frac{4\,\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita, r, resulta que: $r = \sqrt[3]{\dfrac{G \cdot m_M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$

Y como $m_M = m_T/10$, se tiene que: $r = \sqrt[3]{\dfrac{G \cdot m_T \cdot T^2}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2}}$

Multiplicando y dividiendo por el R_T^2, resulta que: $r = \sqrt[3]{\dfrac{G \cdot m_T \cdot T^2 \cdot R_T^2}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot R_T^2}}$

Y como: $g_0 = \dfrac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se obtiene que:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_{0,\ \text{Tierra}} \cdot T^2 \cdot R_T^2}{10 \cdot 4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8\ m/s^2 \cdot (6\ 370 \cdot 10^3\ m)^2 \cdot (8{,}64 \cdot 10^4\ s)^2}{40 \cdot \pi^2}} = 1{,}9\ \text{A}10^7\ m = 19\ 600\ km$$

28. Desde un lugar situado a una distancia del centro de la Tierra igual a 5/4 del radio terrestre, se desea poner en órbita circular un satélite. ¿Qué velocidad hay que comunicarle? ¿Cuál es el período del satélite? Datos: g_0 = 9,8 m/s^2 y R_{Tierra} = 6370 km.

La fuerza de interacción gravitatoria es la que permite al satélite describir un movimiento circular en torno al astro central.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento circular y como $g_0 = \dfrac{G \cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ \frac{G \cdot m_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2_{satélite}}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_{Tierra}}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{Tierra}}{\frac{5}{4} \cdot R_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot m_{Tierra} \cdot R_{Tierra}}{5 \cdot R^2_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ m}{5}} = 7\ 067\ m/s$$

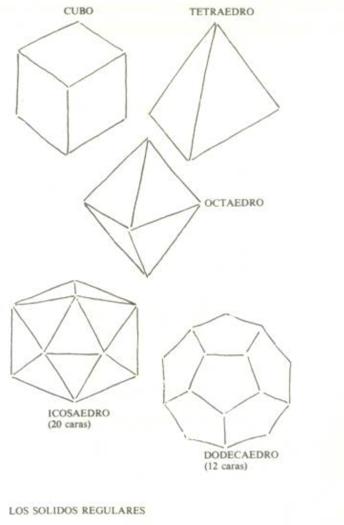
El período del movimiento es: $T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{4} 6{,}37 \cdot 10^6\ m}{7067\ m/s} = 7079\ s$

INVESTIGA

1. Kepler, inicialmente, buscando la armonía de los cielos asoció las órbitas de los planetas conocidos hasta entones con los cuerpos sólidos regulares pitagóricos: cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro y octaedro. Busca de qué forma intentaba Kepler encajar las órbitas de los planetas con los sólidos regulares.

Kepler, en su juventud, creyó que había alguna relación entre las órbitas de los planetas y los sólidos regulares pitagóricos.

Ideó un esquema que consistía en meter una esfera dentro de cada una de estas figuras y cada figura dentro de otra esfera mayor. Así, la esfera exterior, que representaba la órbita de Saturno, contenía al cubo, el cual contenía a la esfera de Júpiter, la cual contenía al tetraedro, el cual a su vez contenía la esfera de Marte, y así hasta llegar a la esfera de Mercurio, contenida en el octaedro.



Kepler maravillado por esta construcción, la cual consideró una revelación divina, intentó construir un modelo para comprobar si las distancias entre los planetas y el Sol iban en la misma proporción que los tamaños de las esferas.

Sin embargo estas no coincidían, pero tan convencido estaba Kepler por esta armonía entre los planetas y los sólidos de Pitágoras, que concluyó que las observaciones debían contener algunos errores. Aunque él mismo pudo comprobar años después que este modelo no tenía ninguna relación con las posiciones de los planetas.

2. Recientemente se le ha quitado a Plutón la categoría de planeta. Investiga cuando se tomó ese acuerdo y las razones que lo motivaron.

En el año 2006 y en la ciudad de Praga los astrónomos aprobaron por unanimidad las siguientes categorías de objetos del sistema solar.

Primera categoría: Un planeta es un cuerpo celeste que está en órbita alrededor del Sol, que tiene suficiente masa para tener gravedad propia para superar las fuerzas rígidas de un cuerpo de manera que asuma una forma equilibrada hidrostática, es decir, redonda, y que ha despejado las inmediaciones de su órbita.

Segunda categoría: Un planeta enano es un cuerpo celeste que está en órbita alrededor del Sol, que tiene suficiente masa para tener gravedad propia para superar las fuerzas rígidas de un cuerpo de manera que asuma una forma equilibrada hidrostática, es decir, redonda; que no ha despejado las inmediaciones de su órbita y que no es un satélite.

Tercera categoría: Todos los demás objetos que orbitan alrededor del Sol son considerados colectivamente como cuerpos pequeños del Sistema Solar.

En consecuencia, de acuerdo con esta definición, los planetas del Sistema Solar son a partir de ahora ocho, en lugar de nueve: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno (ordenados por su cercanía al Sol, de menor a mayor).

Plutón, descubierto en 1930, pierde así su condición de planeta, y continúa integrando el Sistema Solar como planeta enano.

TEST DE AUTOEVALUACIÓN

1. Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La Tierra se mueve alrededor del Sol más deprisa cuando es verano en el hemisferio norte que en invierno. b) Si la órbita de un satélite es circular, su centro coincide con el de la Tierra. c) La constante de la tercera ley de Kepler solo depende de la masa del astro central. d) Cuanto más lejos está un planeta del Sol menor es su velocidad orbital.

a) Falso
La órbita de la Tierra es casi circular, su distancia al Sol en el afelio de 152 millones de km y en el perihelio de 147 millones de km.

Según la segunda ley de Kepler la línea que une al Sol con un planeta recorre áreas iguale en tiempos iguales. Por tanto, un planeta se mueve más deprisa cuando está más cerca del Sol que cuando está más lejos. Cuando la Tierra está en el perihelio, más cerca del Sol, es invierno en el hemisferio norte y viaja más deprisa que cuando está en el afelio, más lejos del sol, que es verano en el hemisferio norte.

b) Verdadero
Si la órbita no contiene al centro de la Tierra, entonces el momento angular del satélite respecto de la Tierra no se conservaría ya que los vectores de posición y fuerza no serían paralelos.

c) Verdadero
La constante de la tercera ley de Kepler depende de la masa del astro central.

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\cdot\pi^2}{G\cdot m_{astro\ central}}$$

2. Completa la frase: Un satélite geoestacionario recorre su órbita con un período de _______ y está colocada en la vertical del ___________ y se utilizan en ___________.

Un satélite geoestacionario recorre su órbita con un período de 24 horas y está colocada en la vertical del ecuador terrestre y se utilizan en comunicación y meteorología.

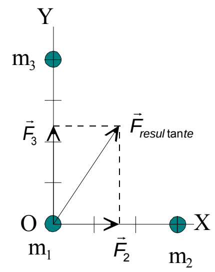
3. El peso de un objeto cual se eleva a una distancia igual a dos veces el radio terrestre es: a) 3 · $P_{superficie}$; b) $P_{superficie}/3$; c) $P_{superficie}/9$; d) $P_{superficie}/2$.

La solución correcta es la c).
Si el objeto se eleva a una distancia de 2 · R_{Tierra}, su distancia desde el centro de la Tierra es igual a 3 · R_{Tierra}. Por lo que el peso del objeto es:

$$P'=\frac{G\cdot m_T}{r^2}=\frac{G\cdot m_T}{9\cdot R_T}=\frac{P_{superficie}}{9}$$

4. En el origen de coordenadas se sitúa una masa m_1=1kg, en el punto A (3, 0) se coloca otra masa m_2 = 2 kg y en el punto B (0, 4) una tercera m_3 = 3 kg. El módulo de la fuerza que actúa sobre la masa colocada en el origen es: a) 1,94 · 10^{-11} N; b) 2,73 · 10^{-11} N c) 0 N d) 1,94 ·10^{-9} N

La solución correcta es la a)
La masa m_2 actúa con una fuerza de dirección la del eje X y sentido positivo, hacia la masa m_2. Su módulo es:



$$F_1=G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{1kg\cdot 2kg}{(3\,m)^2}=1{,}48\cdot 10^{-11}N$$

La masa m_3 actúa con una fuerza de dirección la del eje Y y sentido positivo, hacia la masa m_3. Su módulo es:

$$F_2=G\frac{m_2\cdot m_3}{r^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{1kg\cdot 3kg}{(4\,m)^2}=1{,}25\cdot 10^{-11}N$$

Las dos fuerzas son perpendiculares, el módulo de la fuerza resultante se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$$F_{resultante}=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{(1{,}48\cdot 10^{-11}N)^2+(1{,}25\cdot 10^{-11}N)^2}=1{,}94\cdot 10^{-11}N$$

5. Una unidad astronómica, U.A, es igual a la distancia media desde la Tierra hasta el Sol. Si el planeta Saturno tarda 29,5 años en recorrer su órbita, su distancia Sol expresada en unidades astronómicas es: a) 29,5 U.A. b) 9,5 U.A. c) 59 U.A. d) 100 U.A.

La solución correcta es la b)

Aplicando la tercera ley de Kepler: $\frac{T^2_{Tierra}}{R^3_{Tierra}}=\frac{T^2_{Saturno}}{R^3_{Saturno}}$

Sustituyendo: $\frac{(1año)^2}{(1U.A.)^3}=\frac{(29{,}5años)^2}{R^3_{Saturno}}\Rightarrow R_{Saturno}=9{,}5U.A.$

6. Si un satélite está situado en una órbita a 330 km de la Tierra, su período de revolución es: a) 91 min; b) 62 min; c) 120 min; d) 1 h.

La respuesta correcta es la a)

Radio de la órbita es: $r = R_T + 330\ km = 6370 \cdot 10^3\ m + 330 \cdot 10^3\ m = 6{,}70 \cdot 10^6\ m$

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m_S \cdot \vec{a}_n; G\frac{m_T \cdot m_S}{r^2} = m_S \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G\cdot m_T}{R_T^2}$, se tiene que el período es:

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot m_T}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\cdot R_T^2}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{(6{,}70\cdot10^6\,m)^3}{9{,}8\,m/s^2\cdot(6{,}37\cdot10^6\,m)^2}} = 5{,}5 \cdot 10^3\ s = 91\ min$$

7. Un planeta posee un radio que es el doble del radio terrestre y su densidad media es la misma que la de la Tierra. El peso de los objetos en ese planeta respecto de lo que pesan en la Tierra es: a) 2 · $P_{Tierrra}$; b) $P_{Tierrra}$; c) $P_{Tierrra}$ /2; d) P_{Tierra}/4.

La solución correcta es la a)

Como la densidad es la misma que la de la Tierra, la masa de se planeta es:

$$\rho = \rho'; \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'}; \Rightarrow M' = M\frac{V'}{V} = M\frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R'^3}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3} = M\frac{(2\cdot R)^3}{R} = 8\cdot M$$

Y el peso del objeto es: $P' = \frac{G\cdot M'\cdot m}{r^2} = \frac{G\cdot 8\cdot M\cdot m}{(2\cdot R)^2} = 2\cdot P_{Tierra}$

8. Completa la frase: El momento angular de la Tierra respecto del Sol es un ________ , de dirección ____ al plano de la órbita y permanece ___________ a lo largo de la trayectoria.

El momento angular de la Tierra respecto del Sol es un vector, de dirección perpendicular al plano de la órbita y permanece constante a lo largo de la trayectoria.

9. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: a) La interacción gravitatoria entre dos masas depende del medio en el que coloquen. b) El momento angular de una partícula no depende del origen del sistema de referencia. c) Si la órbita de un satélite es estable, su vector de posición y el vector fuerza son paralelos d) El vector momento angular de un satélite respecto de la Tierra está contenido en el plano de su órbita.

a) Falso.
EL módulo de la fuerza de interacción gravitatoria no depende del medio en el que se coloquen los objetos, ya que el valor de G es el mismo en cualquier lugar o medio.

b) Falso.
El vector momento angular de una partícula depende del punto respecto del que se considere, ya que depende del vector de posición.

c) Verdadero.
Ya que de otra forma no se conservaría el vector momento angular del satélite respecto del planeta.

d) Falso.
El vector momento angular un satélite respecto de la Tierra es perpendicular al plano de la órbita.

10. Si se duplicara la masa de la Tierra, la distancia a que habría que colocar la Luna para que girase con el mismo período con el que lo hace actualmente sería: a) r' = 2 r; b) $r' = \sqrt[3]{2} \cdot r$ **; c) r' = r/2; d) r' = r.**

La respuesta correcta es la b)

Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r, y como $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n ; G \frac{m_T \cdot m_L}{r^2} = m_L \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{m_T}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita, r, resulta que: $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$

La relación de los radios en los dos supuestos es: $\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{G \cdot m'_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}}{\sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{m'_T}{m_T}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot m_T}{m_T}} \Rightarrow r' = \sqrt[3]{2} \cdot r$