

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

- 1.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola  $f(x) = x^2 + x + 1$ , paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
- 2.- Hallar los puntos de la curva  $f(x) = x^3 - 2x + 2$  en los que su tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
- 3.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2 - 5x + 6$ , paralela a la recta de ecuación  $3x + y - 2 = 0$
- ④.- ¿En qué punto de la curva  $f(x) = \ln x$ , la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos  $(1, 0)$  y  $(e, 1)$ ?
- 5.- Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$ , ¿ existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y=1$ ?
- 6.- Dada la parábola de ecuación  $y = x^2 - 2x + 5$  y la recta secante a ella por los puntos de abscisa  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 3$ , halla la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.
- 7.- Considera la curva de ecuación  $y = x^2 - 2x + 3$ .
  - a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de  $45^\circ$  con el eje de abscisas.
  - b) ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación a dicha recta tangente; y en caso negativo, explica por qué.
- 8.- Dada la función  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , determina:
  - a) Las coordenadas de los puntos de la misma, en los que las tangentes forman un ángulo de  $45^\circ$  con la parte positiva del eje de abscisas.
  - b) La ecuación de la tangente en el punto de abscisa  $x = \sqrt{3}$ .
  - c) La ecuación de la recta normal a la curva en dicho punto.
- 9.- Halla la ecuación de la recta tangente a  $y = \frac{1}{1+x^2}$  en  $x = 1$ .
- 10.- Dada la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , determina los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que la gráfica de  $f(x)$  pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(3, 2)$  y que la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 1$  tiene pendiente igual a  $-1$ .
- 11.- Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto  $(3, 4)$  y que la pendiente de la tangente en el punto  $(-1, 1)$  vale 1.
- 12.- Dada la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , halla los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que se cumpla:
  - a) La función pasa por  $(1, 1)$  y  $(0, 0)$ .
  - b) Tiene derivada segunda nula en  $x = 0$ .
  - c) La tangente en  $(0, 0)$  es paralela a la recta  $4x - y = 5$ .

$$1.- f(x) = x^2 + x + 1, \quad m = 1$$

$$f'(x) = 2x + 1 \rightarrow 2x_0 + 1 = 1 \rightarrow x_0 = 0 \rightarrow y_0 = f(0) = 1$$

$$P_0(0, 1)$$

$$\boxed{y - 1 = 1(x - 0)}$$

$$2.- f(x) = x^3 - 2x + 2, \quad m = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow 3x_0^2 - 2 = 1 \quad x_0^2 = 1 \quad x_0 = \pm 1$$

$$f(1) = 1 \quad f(-1) = 3$$

$$P(1, 1), \quad Q(-1, 3)$$

$$3.- y = x^2 - 5x + 6 \quad 3x + y - 2 = 0 \quad y = -3x + 2$$

$$m = -3$$

$$y' = 2x - 5$$

$$2x_0 - 5 = -3 \rightarrow x_0 = 1 \quad f(1) = 2 \rightarrow P_0(1, 2)$$

$$\boxed{y - 2 = -3(x - 1)}$$

$$4.- y = \ln x$$

$$\vec{v} = (e, 1) - (1, 0) = (e-1, 1) \rightarrow m = \frac{1}{e-1}$$

$$y' = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e-1} \quad x_0 = e-1 \rightarrow y_0 = \ln(e-1)$$

$$P(e-1, \ln(e-1))$$

$$5.- \quad y = x^2 - 8x + 1 \quad / \quad y = 2 \rightarrow m = 0$$

$$y' = 2x - 8 \quad \rightarrow \quad 2x_0 - 8 = 0 \quad x_0 = 4 \quad \rightarrow \quad y_0 = -15$$

$$\underline{\underline{P(4, -15)}}$$

$$6.- \quad y = x^2 - 2x + 5$$

$$x_1 = 1 \quad y_1 = 4 \quad \bar{V} = (3, 8) - (1, 4) = (2, 4) \rightarrow m = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = 3 \quad y_2 = 8$$

$$y' = 2x - 2 \quad 2x_0 - 2 = 2 \quad x_0 = 2 \quad \rightarrow \quad y_0 = 5$$

$$P_0(2, 5)$$

$$\boxed{y - 5 = 2(x - 2)}$$

$$7.- \quad y = x^2 - 2x + 3$$

$$a) \quad \text{tg} \alpha = m \quad \text{tg} 45^\circ = 1 = m$$

$$y' = 2x - 2 \quad 2x_0 - 2 = 1 \quad x_0 = \frac{3}{2} \rightarrow y_0 = \frac{9}{4} \rightarrow P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$\boxed{y - \frac{9}{4} = 1\left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$b) \quad y' = 2x - 2 = 0 \quad x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(1, 2)$$

$$m = 0$$

$$y - 2 = 0(x - 1) \rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$8.- f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$a) m=1$$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 1 \rightarrow 1-x^2 = (1+x^2)^2 \rightarrow 1-x^2 = 1+x^4+2x^2$$

$$x^4+3x^2=0 \quad x^2(x^2+3)=0$$

$$\boxed{x_0=0 \quad y_0=0}$$

$$\boxed{y-0=1(x-0)} \rightarrow y=x$$

$$b) x_0=\sqrt{3} \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{1-\sqrt{3}^2}{(1+\sqrt{3}^2)^2} = \frac{1-3}{(1+3)^2} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8} = m$$

$$\boxed{y - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{8}(x - \sqrt{3})}$$

$$c) \boxed{y - \frac{\sqrt{3}}{4} = 8(x - \sqrt{3})}$$

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{8}} = 8$$

$$9) y = \frac{1}{1+x^2} \quad x_0=1 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad y'(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = m$$

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)}$$

$$10) f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \quad a + b + c = 0 \\ f(3) = 2 \quad 9a + 3b + c = 2 \\ f'(1) = -1 \quad 2a + b = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ b + c = 1 \\ 4c = 8 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{c = 2} \quad \boxed{b = -3} \quad \boxed{a = 1}$$

$$11) f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 4 \quad 9a + 3b + c = 4 \\ f(4) = 2 \quad a - b + c = 1 \\ f'(-1) = 1 \quad -2a + b = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9a + 3 + 6a + c = 4 \\ a - 1 - 2a + c = 1 \\ b = 1 + 2a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 15a + c = 1 \\ -a + c = 2 \end{array} \right\} -$$

$$16a = -1 \quad \boxed{a = -\frac{1}{16}} \quad \boxed{c = \frac{31}{16}} \quad \boxed{b = \frac{7}{8}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{31}{16}}$$

$$12) f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(1) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 4$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'' = 6ax + 2b$$

$$a + b + c + d = 1$$

$$d = 0$$

$$c = 4$$

$$2b = 0$$

$$\boxed{a = -3}$$

$$\boxed{d = 0}$$

$$\boxed{c = 4}$$

$$\boxed{b = 0}$$

$$f(x) = -3x^3 + 4x$$

www.yoquieroaprobar.es