1. Sabiendo que la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ pasa por el punto $P(-1,0)$ y tiene un máximo en $M(0,4)$, hallar la función, el mínimo y el punto de inflexión.

2. Sabiendo que una función polinómica de tercer grado tiene un máximo en $M(-1,1)$ y un mínimo en $N(2,-2)$, hallar la función y su punto de inflexión.

3. Hallar b, c y d en la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$, sabiendo que pasa por $P(0,2)$ y tiene un punto de inflexión en $I(2,-22)$.

4. Determinar una función polinómica de tercer grado, sabiendo que pasa por $P(3,22)$ y $Q(2,11)$ y tiene un punto de inflexión en $I(1,6)$.

5. Determinar b de forma que la función $f(x) = x^4+bx^3+3x^2-15x+3$ tenga un punto de inflexión para $x=1$.

6. Determinar los números reales m y n para los que la función $f:(0,+\infty)\to\Re$, definida por $f(x) = \frac{m}{\sqrt{x}} + n\sqrt{x}$, tiene en el punto $(1,4)$ un punto de inflexión.

7. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $y = x^3-3x^2+2$ en su punto de inflexión.

8. Dada la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x) = x^3-6x^2+2x$, hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en su punto de inflexión.

9. Sea $f:\Re\to\Re$ la función dada por $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Calcular a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $Q(-1,3)$ y que la tangente a dicha gráfica en el punto $M(0,1)$ es horizontal.

10. Determinar el valor de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x) = x(ax^2+bx+c)$ tiene un punto de inflexión en $(-2,12)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x+y+8 = 0$.

Sabiendo que la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ pasa por el punto $P(-1,0)$ y tiene un máximo en $M(0,4)$, hallar la función, el mínimo y el punto de inflexión.

Se cumple:

1. Pasa por P(-1,0). $f(-1) = 0$; $-1+b-c+d = 0$; $b-c+d = 1$.

2. Pasa por M(0,4). $f(0) = 4$; $d = 4$.

3. Máximo en x=0. $f'(x) = 3x^2+2bx+c$; $f'(0) = 0$; $c = 0$.

Sustituyendo c y d en la 1ª: $b+4 = 1$; $b = -3$.

La función es: $f(x) = x^3-3x^2+4$.

Derivamos tres veces:

$f'(x) = 3x^2-6x$; $f''(x) = 6x-6$; $f'''(x) = 6$.

Los extremos anulan la derivada:

$3x^2-6x = 0$; $x^2-2x = 0$; $x(x-2) = 0$; $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Para x=0 tiene un máximo, según el enunciado.

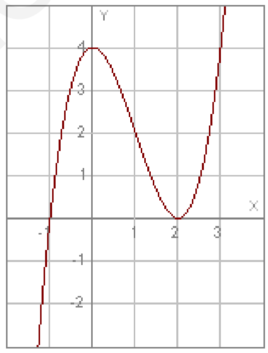
Comprobemos que x=2 es un mínimo:

$f''(2) = 12-6 = 6 > 0 \Rightarrow$ es un mínimo. $f(2) = 12-12 = 0$. N(2,0).

Los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada:

$6x-6 = 0$; $x = 1$.

Como es $f'''(x) = 6 \neq 0$, es un punto de inflexión. $f(1) = 1-3+4 = 2$. I(1,2).



$f(x) = x^3-3x^2+4$

Solución: $f(x) = x^3-3x^2+4$
Mínimo: N(2,0). Punto de inflexión: I(1,2).

Sabiendo que una función polinómica de tercer grado tiene un máximo en $M\left(-1,1\right)$ y un mínimo en $N\left(2,-2\right)$, hallar la función y su punto de inflexión.

Sea la función $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.

Derivamos e imponemos las condiciones del enunciado:

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$.

1. Pasa por M(-1,1). $f(-1) = 1$; $-a+b-c+d = 1$.
2. Pasa por N(2,-2). $f(2) = -2$; $8a+4b+2c+d = -2$.
3. Máximo en x=-1. $f'(-1) = 0$; $3a-2b+c = 0$.
4. Mínimo en x=2. $f'(2) = 0$; $12a+4b+c = 0$.

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -a+b-c+d = 1 \\ 8a+4b+2c+d = -2 \\ 3a-2b+c = 0 \\ 12a+4b+c = 0 \end{array}\right\}$

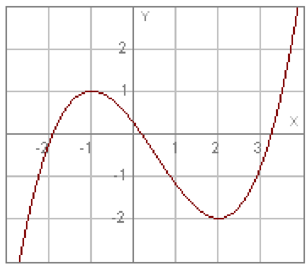
Eliminamos d restando la 2ª y la 1ª: $\left.\begin{array}{r} 9a+3b+3c = -3 \\ 3a-2b+c = 0 \\ 12a+4b+c = 0 \end{array}\right\}$; $\left.\begin{array}{r} 3a+b+c = -1 \\ 3a-2b+c = 0 \\ 12a+4b+c = 0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{lr} 2^a-1^a & -3b = 1 \\ 3^a-2^a & 9a+6b = 0 \end{array}\right\}$; $b = -\dfrac{1}{3}$; $9a-2 = 0$; $a = \dfrac{2}{9}$.

Sustituimos en la 1ª ecuación: $\dfrac{6}{9}-\dfrac{1}{3}+c = -1$; $6-3+9c = -9$; $9c = -12$; $c = -\dfrac{4}{3}$

Sustituimos en la 1ª condición: $-\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}+d = 1$; $-2-3+12+9d = 9$; $9d = 2$; $d = \dfrac{2}{9}$

La función es: $f(x) = \dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{9} = \dfrac{2x^3-3x^2-12x+2}{9}$



$y = \dfrac{2x^3-3x^2-12x+2}{9}$

Para hallar el punto de inflexión derivamos dos veces:

$f'(x) = \dfrac{6x^2-6x-12}{9} = \dfrac{2x^2-2x-4}{3}$; $f''(x) = \dfrac{4x-2}{3}$

La 2ª derivada debe ser cero:

$\dfrac{4x-2}{3} = 0$; $4x-2 = 0$; $x = \dfrac{2}{4}$; $x = \dfrac{1}{2}$.

El transformado es: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\dfrac{1}{8}-3\dfrac{1}{4}-6+2}{9} = \dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-4}{9} = \dfrac{\dfrac{1-3-16}{4}}{9} = \dfrac{-18}{36} = \dfrac{-1}{2}$

Solución: $f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2-12x+2}{9}$

Punto de inflexón: $I\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Hallar b, c y d en la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$, sabiendo que pasa por $P(0,2)$ y tiene un punto de inflexión en $I(2,-22)$.

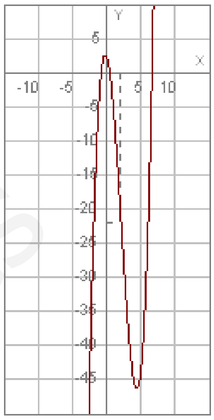
Debe cumplirse:

1. Pasa por P(0,2). $f(0) = 2$; $d = 2$.
2. Pasa por I(2,-22). $f(2) = -22$; $8+4b+2c+d = -22$; $4b+2c+d = -30$.
3. Punto de inflexión en $x = 2$: $f'(x) = 3x^2+2bx+c$; $f''(x) = 6x+2b$.

$f''(2) = 0$; $12+2b = 0$; $2b = -12$; $b = -6$.

Sustituyendo en la 2ª: $-24+2c+2 = -30$; $2c = -8$; $c = -4$.

Solución: $b = -6$; $c = -4$; $d = 2$.



$y = x^3-6x^2-4x+2$

EJERCICIO 4

Determinar una función polinómica de tercer grado, sabiendo que pasa por $P(3,22)$ y $Q(2,11)$ y tiene un punto de inflexión en $I(1,6)$.

La función debe ser de la forma: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Para hallar los coeficientes, imponemos las condiciones del enunciado:

1. Pasa por P(3,22). $f(3) = 22$; $27a+9b+3c+d = 22$.
2. Pasa por Q(2,11). $f(2) = 11$; $8a+4b+2c+d = 11$.
3. Pasa por I(1,6). $f(1) = 6$; $a+b+c+d = 6$.
4. Punto de inflexión en $x = 1$. $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$; $f''(x) = 6ax+2b$; $6a+2b = 0$; $3a+b = 0$; $b = -3a$.

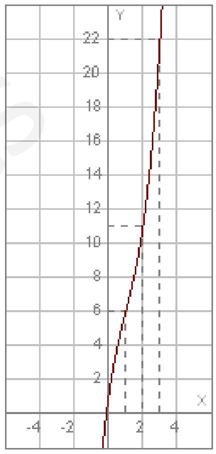
Teniendo en cuenta la última relación, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 27a-27a+3c+d = 22 \\ 8a-12a+2c+d = 11 \\ a-3a+c+d = 6 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{r} 3c+d = 22 \\ -4a+2c+d = 11 \\ -2a+c+d = 6 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{r} 3c+d = 22 \\ -4a+2c+d = 11 \\ 4a-2c-2d = -12 \end{array}\right\} ; \ \underset{2^a+3^a}{} \left.\begin{array}{r} 3c+d = 22 \\ -d = -1 \end{array}\right\} ; \ d = 1 ;$$

$3c = 21$; $c = 7$.

Sustituimos en la 3^a: $-2a+7+1 = 6$; $-2a = -2$; $a = 1$.

Por último: $b = -3a$; $b = -3$.



$y = x^3-3x^2+7x+1$

Solución: $f(x) = x^3-3x^2+7x+1$

Determinar b de forma que la función $f(x) = x^4+bx^3+3x^2-15x+3$ tenga un punto de inflexión para $x=1$.

Si tiene un punto de inflexión, debe anularse la 2ª derivada:

$f'(x) = 4x^3+3bx^2+6x-15$; $f''(x) = 12x^2+6bx+6$

Debe ser: $f''(1) = 0$; $12+6b+6 = 0$; $2+b+1 = 0$; $b = -3$.

La 3ª derivada es: $f'''(x) = 24x+6b$; $f'''(x) = 24x-18$.

Como es $f'''(1) = 24-18 = 6 \neq 0$, es, efectivamente, un punto de inflexión.

Solución: $b = -3$.

Determinar los números reales m y n para los que la función $f:(0,+\infty)\to\Re$, definida por $f(x) = \frac{m}{\sqrt{x}} + n\sqrt{x}$, tiene en el punto $(1,4)$ un punto de inflexión.

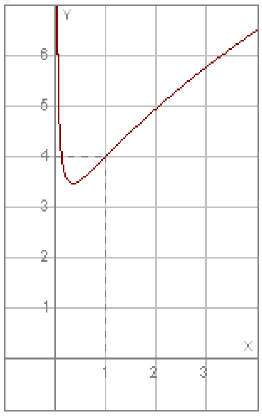
Calculamos las primeras derivadas de f:

$$f(x) = \frac{m+nx}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{n\sqrt{x}-(m+nx)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{n\sqrt{x}-\frac{m+nx}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2nx-m-nx}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{nx-m}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{n\cdot 2x\sqrt{x}-(nx-m)\left(2\sqrt{x}+2x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x^2\cdot x} = \frac{2nx\sqrt{x}-(nx-m)\left(2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}\right)}{4x^3} = \frac{2nx\sqrt{x}-(nx-m)\frac{2x+x}{\sqrt{x}}}{4x^3} =$$

$$\frac{2nx\sqrt{x}-\frac{3x(nx-m)}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{\frac{2nx^2-3nx^2+3mx}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{-nx^2+3mx}{4x^3\sqrt{x}} = \frac{-nx+3m}{4x^2\sqrt{x}}.$$



$y = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

Debe cumplirse:

1. Pasa por (1,4). $f(1) = 4$; $m+n = 4$.

2. Punto de inflexión en x=1. $f''(1) = 0$; $\frac{-n+3m}{4} = 0$; $-n+3m = 0$; $n = 3m$.

Sustituimos esta relación en la anterior: $m+3m = 4$; $4m = 4$; $m = 1$; $n = 3$.

Solución: $m = 1$; $n = 3$.

Hallar la pendiente de la tangente a la curva $y = x^3-3x^2+2$ en su punto de inflexión.

Hallamos el punto de inflexión derivando dos veces:

$y' = 3x^2-6x$; $y'' = 6x-6$.

Como el punto de inflexión anula la 2ª derivada:

$6x-6 = 0$; $x = 1$.

La pendiente m de la recta tangente en x=1 es la derivada en ese punto:

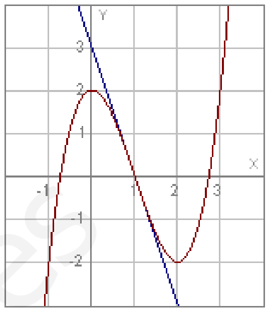
$m = f'(1) = 3-6 = -3$.

Hallemos la recta tangente en x = 1.

El punto de tangencia es: $f(1) = 1-3+2 = 0$. P(1,0).

La ecuación es:

$y-f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$; $y-0 = -3(x-1)$; $y = -3x+3$.



$y = x^3-3x^2+2$ | $y = -3x+3$

Solución: Pendiente: -3.

Dada la función $f:\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = x^3-6x^2+2x$, hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en su punto de inflexión.

Calculamos el punto de inflexión derivando dos veces:

$f'(x) = 3x^2-12x+2$; $f''(x) = 6x-12$.

Como en el punto de inflexión la 2ª derivada se anula:

$6x-12 = 0$; $x = 2$.

Hallamos ahora la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

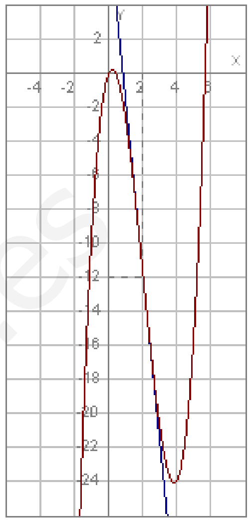
El punto de tangencia es: $f(2) = 8-24+4 = -12$. $P(2,-12)$.

La pendiente de la recta es la derivada en $x=2$:

$f'(2) = 12-24+2 = -10$.

La ecuación es:

$y-f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$; $y+12 = -10(x-2)$; $y+12 = -10x+20$; $y = -10x+8$.



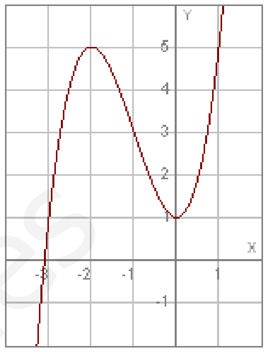
$y = x^3-6x^2+2x$ | $y = -10x+8$

Solución: $y = -10x+8$.

Sea $f:\Re \rightarrow \Re$ la función dada por $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Calcular a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $Q\left(-1,3\right)$ y que la tangente a dicha gráfica en el punto $M\left(0,1\right)$ es horizontal.

Derivamos dos veces:

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$; $f''(x) = 6ax+2b$.



$y = x^3+3x^2+1$

Debe cumplirse:

1. Pasa por Q(-1,3). $f(-1) = 3$; $-a+b-c+d = 3$.
2. Pasa por M(0,1). $f(0) = 1$; $d = 1$.
3. Punto de inflexión en $x = -1$. $f''(-1) = 0$; $-6a+2b = 0$; $-3a+b = 0$; $b = 3a$.
4. Tangente horizontal en $x = 0$.

Como es horizontal, la pendiente de la recta, la derivada, debe ser cero: $f'(0) = 0$; $c = 0$.

Sustituyendo en la 1ª condición: $-a+3a+0+1 = 3$; $2a = 2$; $a = 1$.

Solución: $a = 1$; $b = 3$; $c = 0$; $d = 1$.

Determinar el valor de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x) = x\left(ax^2+bx+c\right)$ tiene un punto de inflexión en $\left(-2,12\right)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x+y+8 = 0$.

Derivamos dos veces la función:

$f(x) = ax^3+bx^2+cx$; $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$; $f''(x) = 6ax+2b$.

Debe cumplirse:

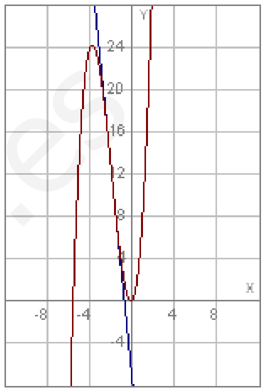
1. Pasa por (-2,12). $f(-2) = 12$; $-8a+4b-2c = 12$; $-4a+2b-c = 6$.

2. Punto de inflexión en x=2. $f''(-2) = 0$; $-12a+2b = 0$; $-6a+b = 0$; $b = 6a$.

3. Tangente $y = -10x-8$ en $x = -2$.

La pendiente de la recta, -10, debe coincidir con la derivada de la función en el -2:

$f'(-2) = -10$; $12a-4b+c = -10$.



$y = x^3+6x^2+2x$ | $y = -10x-8$

Haciendo b = -6a, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -4a+12a-c = 6 \\ 12a-24a+c = -10 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{r} 8a-c = 6 \\ -12a+c = -10 \end{array}\right\} ; -4a = -4 \ ; \ a = 1 \ ; \ -12+c = -10 \ ; \ c = 2 \ ; \ b = 6.$$

Solución: $a = 1$; $b = 6$; $c = 2$.