1. Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcular, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área.

2. Un espejo rectangular de 10x15 cm.se ha roto por una esquina, desprendiéndose un trozo de forma triangular de 5 cm. de alto y 3 cm. de ancho. Con la parte restante se quiere formar un nuevo espejo rectangular. Hallar las dimensiones que debe tener para que el área sea máxima.

3. En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 metros de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 metros sin vallar, tal como se muestra en la figura. Hallar las dmensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse y el valor de dicha área.

4. Se tiene una alambre de 1 metro de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con ellos un círculo y un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada trozo para que la suma de ambas áreas sea mínima.

5. Determinar las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2.

6. En una empresa se ha observado que si el precio de un artículo se fija en 0.10 euros, se venden 100.000 unidades diarias, pero por cada 0.01 euros que aumente el precio, disminuye su venta diaria en 10.000 unidades. Por otra parte, la fabricación de dicho artículo supone un coste de 0.04 euros. Calcular el precio de venta de dicho artículo para obtener el máximo beneficio.

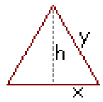
7. Dada una circunferencia de radio r, de divide en uno de sus diámetros en dos partes, que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la circunferencia dada. ¿Qué longitud debe tener cada uno de esos diámetros para que sea máxima el área de la región comprendida entre las circunferencias interiores y la exterior (la región sombreada)?

8. En la orilla de un río de 100 m. de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, a 500 m. río arriba, se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta eléctrica y la fábrica, que el tendido de cables sobre tierra cuesta 12 euros el metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 20 euros el metro, cuál es la longitud del tendido eléctrico más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

9. En un cartón cuadrado de 12.96 dm^2, hallar el lado del cuadrado que hay que cortar en sus esquinas con objeto de formar una caja de volumen máximo.

10. Se quiere construir un depósito cilíndrico abierto de 3 m^3 de capaciad. La chapa para hacer la base cuesta 3 euros el m^2 y la chapa de la pared lateral cuesta 1 euro el m^2. Calcular las dimensiones más económicas.

Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcular, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área.



La función a estudiar es el área del triángulo. Como para calcular el área debemos hallar la altura y necesitamos la mitad de la base, llamaremos $2x$ a la longitud de la base e y a los lados iguales. De esta forma, por el teorema de Pitágoras:

$$y^2 = h^2+x^2 \;;\; h^2 = y^2-x^2 \;;\; h = \sqrt{y^2-x^2}.$$

La función a estudiar es: $A = \dfrac{2x.h}{2} = xh = x\sqrt{y^2-x^2}$

Como tiene dos variables, eliminamos una de ellas imponiendo la condición de que el perímetro sea 5:

$$2x+2y = 5 \;;\; y = \frac{5-2x}{2}.$$

El área queda:

$$A = x\sqrt{\left(\frac{5-2x}{2}\right)^2-x^2} = x\sqrt{\frac{25-20x+4x^2}{4}-x^2} = x\sqrt{\frac{25-20x+4x^2-4x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{25-20x}}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{25-20x}$$

Hallamos las primeras derivadas de la función:

$$A' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{25-20x}+x\frac{-20}{2\sqrt{25-20x}}\right) = \frac{\sqrt{25-20x}}{2}-\frac{5x}{\sqrt{25-20x}} = \frac{25-20x-10x}{2\sqrt{25-20x}} = \frac{25-30x}{2\sqrt{5(5-4x)}} = \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{5-6x}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$A'' = \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{-6\sqrt{5-4x}-(5-6x)\frac{-4}{2\sqrt{5-4x}}}{5-4x} = \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{-6\sqrt{5-4x}+\frac{2(5-6x)}{\sqrt{5-4x}}}{2(25-20x)} = \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{\frac{-6(5-4x)+2(5-6x)}{\sqrt{5-4x}}}{5-4x}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{-30+24x+10-12x}{(5-4x)\sqrt{5-4x}} = \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{12x-20}{(5-4x)\sqrt{5-4x}}$$

Como la primera derivada debe ser nula:

$$\frac{25-30x}{2\sqrt{25-20x}} = 0 \;;\; 25-30x = 0 \;;\; x = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Comprobamos que es un máximo estudiando el signo que tmoa en la 2ª derivada:

$$A'' = \frac{5}{2\sqrt{5}}\frac{10-20}{\left(5-\frac{20}{6}\right)\sqrt{5-\frac{20}{6}}} < 0 \Rightarrow \text{Es un máximo}$$

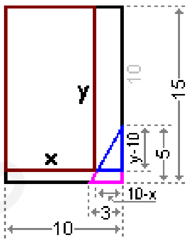
Hallamos,por ultimo, los lados:

Base: $2x = \dfrac{5}{3}$

Lados iguales: $y = \dfrac{5-\frac{5}{3}}{2} = \dfrac{\frac{10}{3}}{2} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

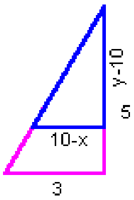
Solución: Debe ser un triángulo equilátero de $\dfrac{5}{3}$ m. de lado.

Un espejo rectangular de 10x15 cm. se ha roto por una esquina, desprendiéndose un trozo de forma triangular de 5 cm. de alto y 3 cm. de ancho. Con la parte restante se quiere formar un nuevo espejo rectangular. Hallar las dimensiones que debe tener para que el área sea máxima.



Sean x e y las dimensiones del nuevo rectángulo, tal como se muestra en la figura. La función a estudiar será el área: $A = xy$.

Para eliminar una variable, imponemos la condición del enunciado. Como se forman dos triángulos semejantes, los lados correspondientes son proporcionales:



$$\frac{10-x}{3} = \frac{y-10}{5} \;;\; 50-5x = 3y-30 \;;\; 3y = 80-5x \;;\; y = \frac{80-5x}{3}.$$

La función queda: $A = \dfrac{80x-5x^2}{3}$

Calculamos las primera derivadas: $A' = \dfrac{80-10x}{3} \;;\; A'' = \dfrac{-10}{3} < 0$

En los extremos, la derivada se anula:

$$\frac{80-10x}{3} = 0 \;;\; 80-10x = 0 \;;\; x = 8.$$

Como la 2ª derivada siempre es negativa, para $x = 8$ la función tiene un máximo.

Calculamos, por último, la altura:

$$y = \frac{80-40}{3} = \frac{40}{3} \approx 13.33$$

Solución: Debe ser de 8x13.33 cm.

En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 metros de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 metros sin vallar, tal como se muestra en la figura. Hallar las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse y el valor de dicha área.

Si llamamos x a la base e y a la altura del rectángulo, la función a estudiar será el área: $A = xy$.

Para eliminar una variable, calculamos la longitud de la valla:

$x + y + y + x - 20 = 80$; $2x+2y = 100$; $x+y = 50$; $y = 50-x$

La función queda: $A = x(50-x) = 50x-x^2$.

Hallamos la 1ª y 2ª derivadas:

$A' = 50-2x$; $A'' = -2 < 0$.

Como en los extremos se anula la 1ª derivada, debe ser:

$50-2x = 0$; $2x = 50$; $x = 25$.

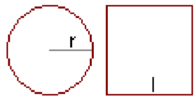
Como siempre es $A'' < 0$, para ese valor la función tiene un máximo.

La altura será: $y = 50-25 = 25$.

Por último, el área es $A= 25 \cdot 25 = 625\ m^2$.

Solución: Un cuadrado de 25 m. de lado. Área = 625 m^2.

Se tiene una alambre de 1 metro de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con ellos un círculo y un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada trozo para que la suma de ambas áreas sea mínima.



Debemos estudiar la suma de las áreas. Si llamamos r al radio del círculo y l a la longitud del lado del cuadrado, la función es: $A = \pi r^2 + l^2$.

Para eliminar una variable calculamos el perímetro total (debe ser igual a 1)

$$2\pi r + 4l = 1 \ ; \ 4l = 1 - 2\pi r \ ; \ l = \frac{1-2\pi r}{4}$$

La función queda:

$$A = \pi r^2 + \left[\frac{1-2\pi r}{4}\right]^2 = \pi r^2 + \frac{1+4\pi^2 r^2 - 4\pi r}{16} = \frac{16\pi r^2 + 1 + 4\pi^2 r^2 - 4\pi r}{16} = \frac{16\pi r^2 + 4\pi^2 r^2 - 4\pi r + 1}{16}$$

Para hallar el mínimo, calculamos la 1ª y 2ª derivadas:

$$A' = \frac{32\pi r + 8\pi^2 r - 4\pi}{16} = \frac{8\pi r + 2\pi^2 r - \pi}{4} \ ; \ A'' = \frac{8\pi + 2\pi^2}{4} = \frac{4\pi + \pi^2}{2} > 0$$

Igualando la 1ª derivada a cero:

$$\frac{8\pi r + 2\pi^2 r - \pi}{4} = 0 \ ; \ 8\pi r + 2\pi^2 r - \pi = 0 \ ; \ 8r + 2\pi r - 1 = 0 \ ; \ (8+2\pi)r = 1 \ ; \ r = \frac{1}{8+2\pi}$$

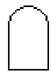
Como siempre es $A'' > 0$, para ese valor la función tiene un mínimo.

Hallamos ahora la longitud de la circunferencia:

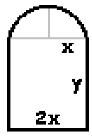
$$L = 2\pi r = \frac{2\pi}{8+2\pi} = \frac{\pi}{4+\pi} \approx 0.44$$

Solución: 44 cm. para la circunferencia y 56 cm. para el cuadrado.

Determinar las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2.



Tenemos que estudiar la función perímetro. Si llamamos $2x$ a la base del rectángulo e y a la altura, el radio de semicircunferencia superior será x. El perímtero de la puerta será:



$P = 2x+2y+\pi x.$

Para eliminar una variable, tenemos en cuenta que el área debe ser igual a 2:

$$A = 2xy+\frac{\pi x^2}{2} \;;\; 2xy+\frac{\pi x^2}{2}=2 \;;\; 4xy+\pi x^2 = 4 \;;\; 4xy = 4-\pi x^2 \;;\; y = \frac{4-\pi x^2}{4x}$$

Sustituyendo en la función:

$$P = 2x+2\frac{4-\pi x^2}{4x}+\pi x = 2x+\frac{4-\pi x^2}{2x}+\pi x = 2x+\frac{4}{2x}-\frac{\pi x^2}{2x}+\pi x = 2x+\frac{2}{x}-\frac{\pi x}{2}+\pi x = 2x+\frac{2}{x}+\frac{\pi x}{2}.$$

Si derivamos dos veces:

$$P' = 2-\frac{2}{x^2}+\frac{\pi}{2} \;;\; P'' = -\frac{-2\cdot 2x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

Para hallar los extremos, igualamos la derivada a cero:

$$2-\frac{2}{x^2}+\frac{\pi}{2} = 0 \;;\; 4x^2-4+\pi x^2 = 0 \;;\; (4+\pi)x^2 = 4 \;;\; x^2 = \frac{4}{4+\pi} \;;\; x = \sqrt{\frac{4}{4+\pi}} \;;\; x = \frac{2}{\sqrt{4+\pi}} \;;\; x \approx 0.75$$

Comprobamos que es un mínimo estudiando el signo que toma en la 2ª derivada:

Como es $x > 0$, $P'' = \frac{4}{x^3} > 0 \Rightarrow$ es un mínimo.

Calculamos, por último y:

$$y = \frac{4-\pi\frac{4}{4+\pi}}{4\frac{2}{\sqrt{4+\pi}}} = \frac{4-\frac{4\pi}{4+\pi}}{\frac{8}{\sqrt{4+\pi}}} = \frac{\frac{16+4\pi-4\pi}{4+\pi}}{\frac{8}{\sqrt{4+\pi}}} = \frac{\frac{16}{4+\pi}}{\frac{8}{\sqrt{4+\pi}}} = \frac{16\sqrt{4+\pi}}{8(4+\pi)} = \frac{2\sqrt{4+\pi}}{4+\pi} = \frac{2}{\sqrt{4+\pi}} \approx 0.75$$

Como la base es $2x$, queda:

Solución: La base debe ser de 1.5 m. y la altura de 0.75 m.

En una empresa se ha observado que si el precio de un artículo se fija en 0.10 euros, se venden 100.000 unidades diarias, pero por cada 0.01 euros que aumente el precio, disminuye su venta diaria en 10.000 unidades. Por otra parte, la fabricación de dicho artículo supone un coste de 0.04 euros. Calcular el precio de venta de dicho artículo para obtener el máximo beneficio.

Debemos estudiar la función bebeficio. Si llamamos x a los céntimos que aumentamos el precio inicial de 0.10 euros, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} > \text{Precio unitario: } 0.10 + 0.01x \\ > \text{Coste de fabricación: } 0.04 \end{array}\right\} > \text{Beneficio unitario: } 0.10+0.01x-0.04 = 0.06+0.01x$$

> Unidades diarias vendidas: $100000 - 10000x$

El beneficio será:

$$B = (100000-10000x)\cdot(0.06+0.01x) = 6000+1000x-600x-100x^2 = -100x^2+400x+6000$$

Derivando dos veces:

$B' = -200x+400$; $B'' = -200 < 0$.

Para hallar los estremos igualamos a cero la derivada:

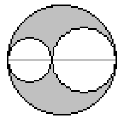
$-200x+400 = 0$; $x = 2$

Como es $B'' < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Al ser x los céntimos que debemos aumentar el precio inicial, queda:

Solución: El precio de venta debe ser de 0.12 euros.

Dada una circunferencia de radio r, se divide en uno de sus diámetros en dos partes, que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la circunferencia dada. ¿Qué longitud debe tener cada uno de esos diámetros para que sea máxima el área de la región comprendida entre las circunferencias interiores y la exterior (la región sombreada)?



Si llamamos x al radio de la circunferencia de la izquierda, el diámetro de la circunferencia de la derecha será: 2r - 2x, por lo que su radio debe ser: $\dfrac{2r-2x}{2} = r-x$

Debemos hacer máximo el área del cículo grande (radio=r) menos el área de los dos círculos interiores (radios x y r-x):

$A = \pi r^2-\pi x^2-\pi(r-x)^2 = \pi r^2-\pi x^2-\pi\left[r^2-2rx+x^2\right] = \pi r^2-\pi x^2-\pi r^2+2\pi rx-\pi x^2 = -2\pi x^2+2\pi rx.$

Derivando dos veces:

$A' = -4\pi x+2\pi r$; $A'' = -4\pi < 0$

Para hallar los extremos, igualamos a cero la derivada:

$-4\pi x+2\pi r = 0$; $-2x+r = 0$; $x = \dfrac{r}{2}.$

Como es siempre $A'' < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Los diámetros serán:

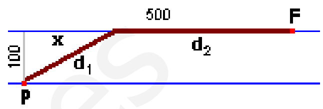
Circunferencia de la izquierda: $2x = r$.

Circunferencia derecha: $2r-2x = r$.

Solución: Las dos circunferencias de diámetro r.

En la orilla de un río de 100 m. de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, a 500 m. río arriba, se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta eléctrica y la fábrica, que el tendido de cables sobre tierra cuesta 12 euros el metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 20 euros el metro, cuál es la longitud del tendido eléctrico más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

Debemos estudiar la función que calcula el coste del tendido. Si llamamos d_1 a la longitud del cable sobre el río y d_2 al que va sobre tierra, teniendo en cuenta el coste de cada uno, será:



$P = 20d_1+12d_2$.

Si llamamos x al la distancia desde la perpendicular de la planta al punto donde se sitúa el cable en la orilla opuesta, como se muestra en la figura, por Pitágoras se cumple:

$$d_1^2 = 100^2+x^2 \ ; \ d_1 = \sqrt{x^2+10000}$$

Como es $d_2 = 500-x$, la función queda:

$$P = 20\sqrt{x^2+10000} + 12(500-x) = 20\sqrt{x^2+10000} +600-12x$$

Derivamos dos veces la función:

$$P' = 20\frac{2x}{2\sqrt{x^2+10000}}-12 = \frac{20x}{\sqrt{x^2+10000}}-12$$

$$P'' = \frac{20\sqrt{x^2+10000} - 20x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+10000}}}{x^2+10000} = \frac{20\sqrt{x^2+10000} - \frac{20x^2}{\sqrt{x^2+10000}}}{x^2+10000} = \frac{\frac{20\left(x^2+10000\right)-20x^2}{\sqrt{x^2+10000}}}{x^2+10000}$$

$$= \frac{20x^2+200000-20x^2}{\left(x^2+10000\right)\sqrt{x^2+10000}} = \frac{200000}{\left(x^2+10000\right)\sqrt{x^2+10000}} > 0$$

Para calcular los extremos igualamos a cero la derivada:

$$\frac{20x}{\sqrt{x^2+10000}}-12 = 0 \ ; \ 20x-12\sqrt{x^2+10000} = 0 \ ; \ 5x = 3\sqrt{x^2+10000} \ ; \ 25x^2 = 9\left(x^2+10000\right) \ ; \ 25x^2 = 9x^2+90000$$

$$; \ 16x^2 = 90000 \ ; \ x^2 = \frac{90000}{16} = 5625 \ ; \ x = \sqrt{5625} = 75.$$

Como es siempre $P'' > 0 \Rightarrow$ es un mínimo.

Calculamos, por último, las logitudes de los cables:

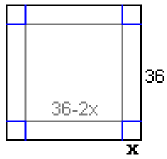
Sobre tierra: $d_2 = 500 - 75 = 425$

Sobre agua: $d_1 = \sqrt{75^2+10000} = \sqrt{15625} = 125$

Solución: 425 m. sobre tierra y 125 m. sobre agua.

En un cartón cuadrado de 12.96 dm^2, hallar el lado del cuadrado que hay que cortar en sus esquinas con objeto de formar una caja de volumen máximo.

Debemos hacer máximo el volumen de la caja (área de la base por la altura). Calculemos previamente el lado del cartón, expresando el área en cm^2:



$A = l^2$; $l^2 = 1296$; $l = \sqrt{1296}$; $l = 36$ cm.

Si llamamos x al lado del cuadrado que debemos cortar, el área de la base de la caja es: $(36-2x)^2$, con lo que el volumen a estudiar es:

$V = (36-2x)^2 x = x\left(1296-144x+4x^2\right) = 4x^3-144x^2+1296x.$

Derivamos dos veces:

$V' = 12x^2-288x+1296$; $V'' = 24x-288$

Para hallar los extremos igualamos la derivada a cero:

$$12x^2-288x+1296 = 0 \;;\; x^2-24x+108 = 0 \;;\; x = \frac{24\pm\sqrt{576-432}}{2} = \frac{24\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{24\pm12}{2} \;;\; x = \begin{cases} \frac{36}{2}=18 \\ \frac{12}{2}=6 \end{cases}$$

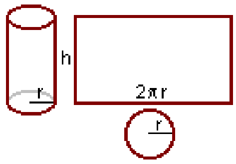
La primera solución no es válida (la base no existiría). Estudiamos el segundo valor:

Si $x = 6$: $V'' = 24\cdot6-288 = -144 < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Solución: El lado debe medir 6 cm.

EJERCICIO 10

Se quiere construir un depósito cilíndrico abierto de 3 m^3 de capacidad. La chapa para hacer la base cuesta 3 euros el m^2 y la chapa de la pared lateral cuesta 1 euro el m^2. Calcular las dimensiones más económicas.



Debemos hacer mínimo el coste de la superficie. Si llamamos r al radio de la base y h a la altura del depósito, es:

Área de la base: πr^2.

Área lateral: $2\pi r \cdot h$

La función a estudiar será, teniendo en cuenta el precio:

$$C = 3\pi r^2 + 2\pi rh$$

Como tenemos dos variables (r y h) imponemos la condición de que el volumen debe ser 3 m^3:

$$V = \pi r^2 h \; ; \; \pi r^2 h = 3 \; ; \; h = \frac{3}{\pi r^2}$$

La función queda:

$$C = 3\pi r^2 + 2\pi r \frac{3}{\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{6}{r}.$$

Derivando dos veces:

$$C' = 6\pi r + \frac{-6}{r^2} = 6\pi r - \frac{6}{r^2} \; ; \; C'' = 6\pi - \frac{-12r}{r^4} = 6\pi + \frac{12}{r^3}$$

Para hallar los extremos igualamos la derivada a cero:

$$6\pi r - \frac{6}{r^2} = 0 \; ; \; 6\pi r^3 - 6 = 0 \; ; \; \pi r^3 = 1 \; ; \; r^3 = \frac{1}{\pi} \; ; \; r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \; ; \; r \approx 0.68$$

Estudiamos el valor que toma en la 2ª derivada:

$$C'' = 6\pi + \frac{12}{r^3} > 0 \Rightarrow \text{es un mínimo.}$$

Calculamos, por último, la altura:

$$h = \frac{3}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi \cdot (0.68)^2} \approx 2.07$$

Solución: Radio de la base 0.68 m. y altura 2.07 m.