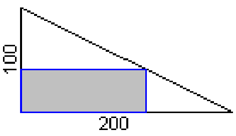
1. Sobre un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 100 m. y 200 m. se quiere construir un edificio de planta rectangular, como se muestra en la figura. Hallar las dimensiones que debe tener dicha planta para que su superficie sea máxima.



2. Se quiere cercar un terreno rectangular situado junto a una carretera. La valla que está junto al camino cuesta 8 euros el metro y la de los otros lados 4 euros el metro. Hallar el área del mayor campo que puede cercarse co un presupuesto de 1200 euros.

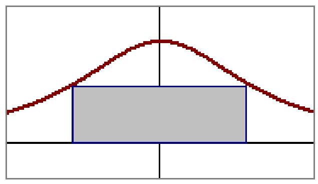
3. El perímetro de un rectágulo es de 4 metros. Sus lados se sustituyen por semicircunferencias exteriores. Hallar el área mínima de la figura formada.

4. Una compañía aérea ofrece vuelos para grupos de estudiantes con las siguientes condiciones: Para organizar un vuelo, el mínimo número de pasajereos debe ser 80, los cuales pagarían 200 euros cada uno. Sin embargo esta tarifa se reduce en un euro por cada viajero que exceda el número de 80. Suponiendo que la capacidad de cada avión es de 105 pasajeros y que el coste para la compañía es de 100 euros por plaza ocupada, ¿qué número de pasajeros ofrecen el máximo y el mínimo beneficio para la compañía?

5. Un barco A se encuentra a 9 km. de un punto B de la costa. En la costa, a 16 km. de B, hay un puesto militar. Un marinero debe llevar un mensaje a dicho puesto y va, en bote, a la velocidad de 4 km/h. y andando a 5 km/h. ¿A qué distancia del puesto debe desembarcar para que el tiempo empleado sea mínimo?

6. En un triángulo isósceles ABC, el lado desigual AB mide 2a y la altura correspondiente a ese lado mide h. Determinar un punto P sobre la altura mencionada de forma que la suma de las distancias desde P hasta los tres vértices sea mínima.

7. De todos los rectángulos inscritos, como indica la figura, entre la gráfica de la función $f:\Re\rightarrow\Re$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje OX, hallar el de mayor área.



8. Los lados de una hoja de cartón de forma rectangular miden 4 y 2 m. respectivamente. Cortzar en sus esquinas cuatro cuadrados iguales, con objeto de formar una caja de volumen máximo.

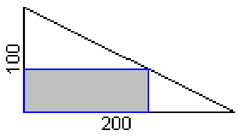
9. El volumen de un cilindro es de 128 dm^3. Calcular el radio que debe tener su base para que el área total sea mínima.

10. Considerar la curva de ecuación $y = x\cdot\sqrt{x}\ (x\geq 0)$.

(1) ¿Cuál es el punto de la curva más cercano al punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$?

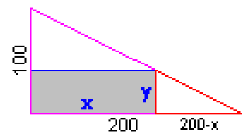
(2) Deducir de forma razonada si existe o no un punto en la curva que sea el que está más lejos de P.

Sobre un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 100 m. y 200 m. se quiere construir un edificio de planta rectangular, como se muestra en la figura. Hallar las dimensiones que debe tener dicha planta para que su superficie sea máxima.



Si llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo, debemos estudiar el área: $A = xy$.

Para eliminar una de las variables, observamos que se forman dos triángulos semejantes (el inicial y el de la derecha, en el dibujo). Los lados correspondientes deben ser proporcionales:



$$\frac{100}{y}=\frac{200}{200-x} \;;\; \frac{1}{y}=\frac{2}{200-x} \;;\; y=\frac{200-x}{2} \;;\; y=\frac{1}{2}(200-x)$$

La función a estudiar queda:

$$A = x\cdot\frac{1}{2}(200-x) = \frac{1}{2}\left[200x-x^2\right].$$

Si derivamos dos veces:

$$A' = \frac{1}{2}(200-2x) \;;\; A'' = \frac{1}{2}(-2) = -1 < 0$$

Para hallar los extremos, igualamos a cero la derivada:

$$\frac{1}{2}(200-2x) = 0 \;;\; 200-2x = 0 \;;\; x = 100.$$

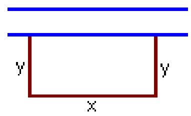
Como es $A'' < 0 \Rightarrow$ El valor es un máximo.

La altura será:

$$y = \frac{1}{2}\cdot 100 = 50.$$

Solución: Base de 100 m. y altura de 50 m.

Se quiere cercar un terreno rectangular situado junto a una carretera. La valla que está junto al camino cuesta 8 euros el metro y la de los otros lados 4 euros el metro. Hallar el área del mayor campo que puede cercarse co un presupuesto de 1200 euros.



Debemos estudiar la función área del terreno. Si llamamos x e y a los lados del rectángulo (en metros), según la figura, será: $A = xy$.

Para eliminar una variable, calculamos el coste de la valla:

$$8x+4y+4y+4x = 1200 \ ; \ 12x+8y = 1200 \ ; \ 3x+2y = 300 \ ; \ y = \frac{300-3x}{2}.$$

La función a estudiar queda:

$$A = x\frac{300-3x}{2} = \frac{30x-3x^2}{2}.$$

Si derivamos dos veces:

$$A' = \frac{300-6x}{2} \ ; \ A'' = \frac{-6}{2} = -3 < 0.$$

Igualamos la derivada a cero para hallar los extremos:

$$\frac{300-6x}{2} = 0 \ ; \ 300-6x = 0 \ ; \ 6x = 300 \ ; \ x = \frac{300}{6} \ ; \ x = 50 \text{ m.}$$

Como es $A'' < 0 \Rightarrow$ Es un máximo.

Calculamos el otro lado y el área:

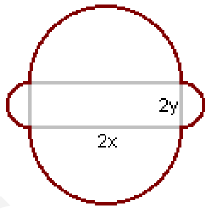
$$y = \frac{300-3\cdot 50}{2} = \frac{150}{2} = 75 \text{ m.}$$

$$\text{Área} = xy = 50 \cdot 75 = 3750 \text{ m}^2.$$

Solución: Área de 3750 m^2.

El perímetro de un rectángulo es de 4 metros. Sus lados se sustituyen por semicircunferencias exteriores. Hallar el área mínima de la figura formada.

Llamemos $2x$ y $2y$ a los lados del rectángulo, como se muestra en la figura (los nombramos así porque serán los diámetros de las circunferencias). El área a estudiar será la del rectángulo más la de las cuatro semicircunferencias. Como las semicircunferencias opuestas forman una circunferencia completa, el área de cada una de ellas será:



$A_1 = \pi x^2$; $A_2 = \pi y^2$

El área total será:

$A = 4xy+\pi x^2+\pi y^2$.

Para eliminar una variable imponemos la condición del perímetro:

$2x+2y+2x+2y = 4$; $4x+4y = 4$; $x+y = 1$; $y = 1-x$.

Queda entonces:

$A = 4x(1-x)+\pi x^2+\pi(1-x)^2 = 4x-4x^2+\pi x^2+\pi+\pi x^2-2\pi x = 2\pi x^2-4x^2-2\pi x+4x+\pi$.

Derivamos dos veces:

$A' = 4\pi x-8x-2\pi+4$; $A'' = 4\pi-8$

Como los extremos anulan la 1ª derivada, debe ser:

$4\pi x-8x-2\pi+4 = 0$; $2\pi x-4x-\pi+2 = 0$; $2\pi x-4x = \pi-2$; $2x(\pi-2) = \pi-2$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

Si sutituimos este valor en la 2ª derivada:

$A'' = 4\pi-4 > 0 \Rightarrow$ Es un mínimo.

Hallamos, por último y:

$y = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Como los lados eran 2x y 2y,

Solución: Debe ser un cuadrado de 1 m. de lado.

Una compañía aérea ofrece vuelos para grupos de estudiantes con las siguientes condiciones: Para organizar un vuelo, el mínimo número de pasajereos debe ser 80, los cuales pagarían 200 euros cada uno. Sin embargo esta tarifa se reduce en un euro por cada viajero que exceda el número de 80. Suponiendo que la capacidad de cada avión es de 105 pasajeros y que el coste para la compañía es de 100 euros por plaza ocupada, ¿qué número de pasajeros ofrecen el máximo y el mínimo beneficio para la compañía?

Debemos estudiar la función beneficio, que será el precio total de los pasajes menos el coste total. Si llamamos x al número de pasajeros que pasan de 80, es:

Nº de pasajeros: 80+x

Precio individual: 210-x (ya que por cada viajero de más descuentan 1 euro).

Los totales serán:

Precio total: (80+x)(210-x)

Coste para la compañía: 100(80+x)

La función a estudiar, el beneficio, queda:

$B = (80+x)(210-x) - 100(80+x) = 16800-80x+210x-x^2-8000-100x = -x^2+30x+8800$.

Derivamos dos veces para estudiar los extremos:

$B' = -2x+30$; $B'' = -2 < 0$

Como los extremos anulan la 1ª derivada:

$-2x+30 = 0$; $x-15 = 0$; $x = 15$

Como es siempre $B'' < 0 \Rightarrow$ Es un máximo.

Como no existe mínimo relativo, calculamos los valores extremos del intervalo [80,105] (la función es continua y derivable). Para obtener el valor de 80 pasajeros, x debe ser igual a 0 y para alcanzar los 105, x debe tomar el valor de 25:

Para x=0: $B = 0+0+8800 = 8800$.

Para x=25: $B = -25^2+30\cdot 25+8800 = 8925$.

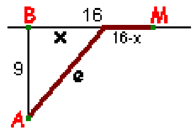
El mínimo se obtiene para x = 0, es decir con 80 pasajeros.

Para el máximo (x=15) serían 95 pasajeros y el beneficio es: $B= -15^2+30\cdot 15+8800 = 9025$

Solución: Máximo beneficio con 95 pasajeros (9025 euros).
Mínimo beneficio con 80 pasajeros (8800 euros).

Un barco A se encuentra a 9 km. de un punto B de la costa. En la costa, a 16 km. de B, hay un puesto militar. Un marinero debe llevar un mensaje a dicho puesto y va, en bote, a la velocidad de 4 km/h. y andando a 5 km/h. ¿A qué distancia del puesto debe desembarcar para que el tiempo empleado sea mínimo?

Estudiamos la función tiemplo empleado. Si llamamos x a la distancia, en km., desde el punto B al lugar del desembarco y e a la distancia que recorre el bote, teniendo en cuenta que es $t = \frac{e}{v}$:



Tiempo empleado en el bote: $t_1 = \frac{e}{4}$.

Tiempo empleado en tierra: $t_2 = \frac{16-x}{5}$.

La función a estudiar será:

$$T = \frac{e}{4} + \frac{16-x}{5}$$

Para suprimir una variable usamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se forma:

$$e^2 = x^2 + 9^2 \;\; ; \;\; e = \sqrt{x^2+81}$$

La función queda: $T = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{16-x}{5}$.

Derivando dos veces:

$$T' = \frac{1}{4}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}} + \frac{-1}{5} = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5}$$

$$T'' = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+81} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+81} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \frac{1}{4}\frac{\frac{x^2+81-x^2}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \frac{81}{4\left(x^2+81\right)\sqrt{x^2+81}} > 0$$

Los valores que anulan la derivada son:

$$\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = 0 \;\; ; \;\; 5x - 4\sqrt{x^2+81} = 0 \;\; ; \;\; 5x = 4\sqrt{x^2+81} \;\; ; \; 25x^2 = 16\left(x^2+81\right) \;\; ; \;\; 25x^2 = 16x^2 + 1296 \;\; ; \; 9x^2 = 1296$$

$; \; x^2 = 144 \;\; ; \; x = \sqrt{144} \;\; ; \; x = 12$ (elegimos el valor positivo).

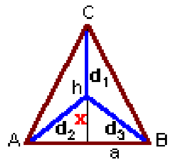
Como siempre es $T'' > 0 \Rightarrow$ Es un mínimo.

La distancia del punto de desembarco al puesto es: 16-12 = 4.

Solución: Debe desembarcar a 4 km. del puesto.

En un triángulo isósceles ABC, el lado desigual AB mide 2a y la altura correspondiente a ese lado mide h. Determinar un punto P sobre la altura mencionada de forma que la suma de las distancias desde P hasta los tres vértices sea mínima.

Supongamos que el punto P elegido sobre la altura está a una distancia x de la base. Debemos procurar que sea mínima la suma de las distancias a los vértices:



$D = d_1+d_2+d_3$.

Como el triángulo es isósceles, los puntos de la altura equidistan de los vértices A y B, por lo que las distancias d_2 y d_3 son iguales. Por Pitágoras:

$d_2^2 = x^2+a^2 \;;\; d_2 = d_3 = \sqrt{x^2+a^2}$.

La distancia d_1 es : $d_1 = h-x$

La función queda:

$D = h-x+2\sqrt{x^2+a^2}$ (a es constante)

Si derivamos dos veces:

$$D' = -1+2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} = -1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

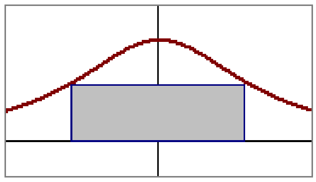
$$D'' = \frac{2\sqrt{x^2+a^2}-2x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} = \frac{2\sqrt{x^2+a^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} = \frac{\dfrac{2\left(x^2+a^2\right)-2x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} = \frac{2x^2+2a^2-2x^2}{\left(x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2a^2}{\left(x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}} > 0$$

Para hallar los extremos, igualamos la 1ª derivada a cero:

$$-1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}} = 0 \;;\; \frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}} = 1 \;;\; 2x = \sqrt{x^2+a^2} \;;\; 4x^2 = x^2+a^2 \;;\; 3x^2 = a^2 \;;\; x^2 = \frac{a^2}{3} \;;\; x = \sqrt{\frac{a^2}{3}} \;;\; x = \frac{a}{\sqrt{3}} \;;\; x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Como siempre es $D'' < 0 \Rightarrow$ Es un mínimo.

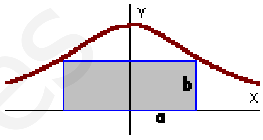
Solución: Debe estar a una distancia $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ de la base.



De todos los rectángulos inscritos, como indica la figura, entre la gráfica de la función $f:\Re\rightarrow\Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y el eje OX, hallar el de mayor área.

Si llamamos 2a a la longitud de la base del rectángulo y b a la altura, la función área del rectángulo a estudiar es:

$A = 2a\cdot b$.



Para eliminar una variable, tenemos en cuenta que el punto (a,b) es de la gráfica de la función, por lo que debe ser: $b = \frac{1}{1+a^2}$.

La función queda, pues: $A = \frac{2a}{1+a^2}$.

Si derivamos dos veces:

$$A' = \frac{2(1+a^2)-2a\cdot 2a}{(1+a^2)^2} = \frac{2+2a^2-4a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2-2a^2}{(1+a^2)^2}.$$

$$A'' = \frac{-4a(1+a^2)^2-(2-2a^2)2(1+a^2)2a}{(1+a^2)^4} = \frac{-4a(1+a^2)-(2-2a^2)4a}{(1+a^2)^3} = \frac{-4a-4a^3-8a+8a^3}{(1+a^2)^3} = \frac{4a^3-12a}{(1+a^2)^3}.$$

Para determinar los extremos anulamos la 1ª derivada:

$$\frac{2-2a^2}{(1+a^2)^2} = 0 \;;\; 2-2a^2 = 0 \;;\; 1-a^2 = 0 \;;\; a^2 = 1 \;;\; a = 1$$

Estudiamos el signo que toma en la 2ª derivada:

$$D'' = \frac{4-12}{1} < 0 \Rightarrow \text{Es un máximo.}$$

Calculamos por último las dimensiones:

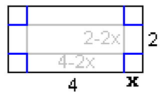
Base: $2a = 2$.

Altura: $b = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Solución: Base 2 y altura 0.5.

Los lados de una hoja de cartón de forma rectangular miden 4 y 2 m. respectivamente. Cortar en sus esquinas cuatro cuadrados iguales, con objeto de formar una caja de volumen máximo.

La función a estudiar será el volumen de la caja (área de la base por la altura). Si llamamos x al lado del cuadrado que debemos cortar en las esquinas, tenemos:

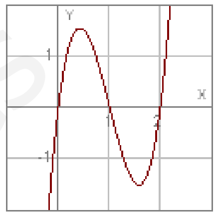


Área de la base de la caja: $(4-2x)(2-2x)$.

Altura de la caja: x.

La función es:

$$V = (4-2x)(2-2x)x = \left[8-8x-4x+4x^2\right]x = \left[4x^2-12x+8\right]x = 4x^3-12x^2+8x.$$



$V(x) = 4x^3-12x^2+8x$

Derivamos dos veces:

$$V' = 12x^2-24x+8 \;\;;\;\; V'' = 24x-24.$$

Para hallar los extremos igualamos la 1ª derivada a cero:

$$12x^2-24x+8 = 0 \;\;;\;\; 3x^2-6x+2 = 0 \;\;;\;\; x = \frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6} = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} \;;\; x \approx \frac{6\pm 3.46}{6} = \begin{cases} \dfrac{6+3.46}{6} \\[2mm] \dfrac{6-3.46}{6} \end{cases} \approx \begin{cases} 1.58 \\ 0.42 \end{cases}$$

Como la primera solución no es válida (un lado del rectángulo de la base sería negativo) estudiamos el signo que toma el 2º valor en la 2ª derivada:

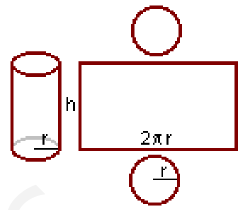
$V'' = 24\cdot 0.42-24 = -13.92 < 0 \Rightarrow$ Es un máximo.

Solución: El cuadrado debe ser de 42 cm. de lado.

EJERCICIO 9

El volumen de un cilindro es de 128 dm^3. Calcular el radio que debe tener su base para que el área total sea mínima.

Debemos estudiar la función superficie total del cilindro. Si llamamos r al radio de la base y h a la altura del cilindro, la función será:



$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$

Para eliminar una variable imponemos que el volumen (área de la base por la altura) debe ser de 128 dm^3:

$$\pi r^2 h = 128 \;\; ; \;\; h = \frac{128}{\pi r^2}$$

La función queda:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{128}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{256}{r}$$

Para estudiar los extremos derivamos dos veces:

$$S' = 4\pi r + \frac{-256}{r^2} = 4\pi r - \frac{256}{r^2} \;\; ; \;\; S'' = 4\pi - \frac{-256 \cdot 2r}{r^4} = 4\pi + \frac{512}{r^3}.$$

Igualando la 1ª derivada a cero:

$$4\pi r - \frac{256}{r^2} = 0 \;\; ; \;\; 4\pi r^3 - 256 = 0 \;\; ; \;\; r^3 = \frac{256}{4\pi} \;\; ; \; r = \sqrt[3]{\frac{64}{\pi}} \;\; ; \; r \approx 2.73.$$

Si sutituimos este valor en la 2ª derivada:

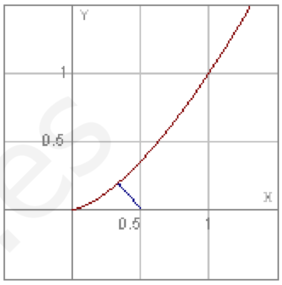
$$S'' = 4\pi + \frac{512}{(2.73)^3} > 0 \Rightarrow \text{Es un mínimo.}$$

Solución: 2.73 dm.

Considerar la curva de ecuación $y = x\sqrt{x}\ (x \geq 0)$.

(1) ¿Cuál es el punto de la curva más cercano al punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$?

(2) Deducir de forma razonada si existe o no un punto en la curva que sea el que está más lejos de P.



(**1**) Supongamos sea Q(a,b) el punto de la curva que buscamos. Como pertenece a la curva, debe ser $b = a\sqrt{a}$, por lo que es de la forma: $Q\left(a, a\sqrt{a}\right)$.

La función a estudiar es la distancia entre dos puntos:

$$D = \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} - a + a^2 a} = \sqrt{a^3 + a^2 - a + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4a^3 + 4a^2 - 4a + 1}{4}}$$

Para el punto en que la distancia es mínima, también será mínima el cuadrado de las distancias. Estudiamos la función cuadrado:

$$F = \frac{4a^3 + 4a^2 - 4a + 1}{4} = \frac{1}{4}\left(4a^3 + 4a^2 - 4a + 1\right).$$

Derivando dos veces:

$$F' = \frac{1}{4}\left(12a^2 + 8a - 4\right) = 3a^2 + 2a - 1 \ ; \ F'' = 6a + 2.$$

Igualamos F' a cero para hallar los extremos:

$$3a^2 + 2a - 1 = 0 \ ; \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-2-4}{6} = -1. \text{ No se considera } (x \geq 0) \end{cases}$$

Estudiamos el signo que toma el valor en F'':

$F'' = 2 + 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ Es un mínimo.

El punto será: $Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = Q\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

Solución: El punto más próximo es $Q\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

(**2**) Si calculamos el límite en el $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$

Solución: No existe el punto que está más alejado de P.