REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1. Se considrea la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$.

(1) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

2. Hallar el valor de la constante k sabiendo que la curva de ecuación $y = \frac{x^3+kx^2+1}{x^2+1}$ posee una asíntota que pasa por el punto $(1,3)$.

3. Se considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$.

(1) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Estudiar la posición de la gráfica de f respecto a sus asíntotas.

(3) Esbozar la gráfica de f.

4. Representar gráficamente la función $f(x) = x-x^3$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

5. Sea f la función definida, para $x \neq 1$, por $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$.

(1) Determinar las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.

(3) Esbozar la gráfica de f.

6. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$, para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

(1) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(3) Con los datos obtenidos, esbozar la gráfica de f.

7. Se considera la función f definida para $x \neq 0$ por la relación $f(x) = \frac{4x^2+3x+4}{x}$.

(1) Hallar sus asíntotas.

(2) Determinar sus extremos locales.

(3) Dibujar la gráfica de f indicando su posición respecto a las asíntotas.

8. Representar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, asíntotas y concavidad y convexidad.

9. Representar gráficamente la función $f(x) = e^{1-x^2}$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

10. Representar gráficamente la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

EJERCICIO 1

Se considera la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$.

(1) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

---

(1) A. horizontal. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$. Recta y = 1.

A. vertical. No tiene, ya que no existe ningun valor de x que haga infinito a la función.

A. oblicua. No tiene (tiene horizontal).

Solución: Asíntota horizontal y = 1.

(2) La función es creciente si la derivada es postiva.

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}e^{\frac{2x}{x^2+1}} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}e^{\frac{2x}{x^2+1}} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}e^{\frac{2x}{x^2+1}} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} > 0 \Rightarrow -2x^2+2 > 0\ ;\ x^2-1 < 0\ ;\ x^2 < 1\ ;\ |x| < 1\ ;$$

$-1 < x < 1$.

> La exponencial siempre es positiva.
> Si cambiamos una desigualdad de signo debemos cambiar el sentido.

La función es creciente en el intervalo (-1,1) y decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$.

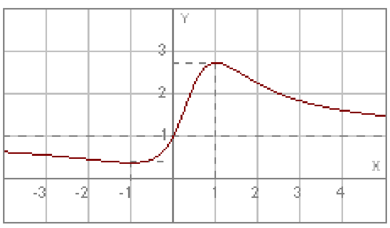
Como es una función continua y en el -1 pasa de decreciente a creciente, tiene un mínimo. Lo contrario ocurre en el 1, por lo que tiene un máximo.

Hallamos los transformados:

$$f(-1) = e^{\frac{-2}{1+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}\ ;\ f(1) = e^{\frac{2}{1+1}} = e.$$

Solución: Creciente en (-1,1). Decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Mínimo en $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$. Máximo en (1,e).



Hallar el valor de la constante k sabiendo que la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3+kx^2+1}{x^2+1}$ posee una asíntota que pasa por el punto $(1,3)$.

Calculamos la asíntota oblicua (no tiene vertical ni horizontal):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+kx^2+1}{x^3+x} = 1.$$

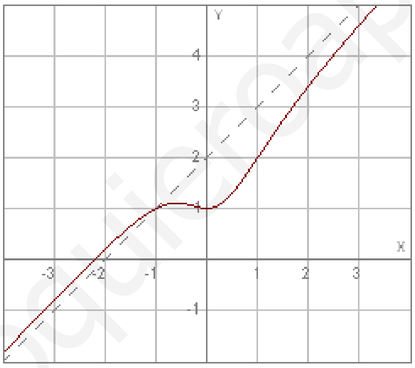
$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3+kx^2+1}{x^2+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+kx^2+1-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{kx^2-x+1}{x^2+1} = k.$$

Asíntota oblicua es la recta $y = mx + n$, siendo: $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx]$

La ecuación de la asíntota es: $y = x+k$.

Como pasa por el punto (1,3): $3 = 1+k$; $k = 2$.

Solución: $k = 2$.



$y = \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}$; $y = x+2$

Se considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$.

(1) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Estudiar la posición de la gráfica de f respecto a sus asíntotas.

(3) Esbozar la gráfica de f.

---

(1) A. vertical. Como se anula el denominador para x=1, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, la recta x = 1 es asíntota vertical.

A. horizontal. No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ no es finito.

A. oblicua. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x} = 1.$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+1}{x-1} = -1.$$

La recta y = x-1 es asíntota oblicua.

Solución: Vertical, $x = 1$. Oblicua, $y = x-1$.

(2) La gráfica de la función está a ambos lados de la asíntota vertical. Para estudiar la posición respecto a la asíntota oblicua estudiamos el signo que toma la resta de ambas.

$$\text{Sea } h(x) = f(x)-(x-1) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}-(x-1) = \frac{x^2-2x+2-(x-1)^2}{x-1} = \frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$h(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1.$$

Si $x > 1$, es $f(x)-(x-1) > 0$; $f(x) > x-1$ y la gráfica estará encima de la asíntota.

Solución: La gráfica está encima de la asíntota oblícua para $x > 1$.

(3) Estudiamos el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

La función es creciente si la derivada es positiva:

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} > 0 \ ; \ x^2-2x > 0 \ ; \ x(x-2) > 0$$

Estudiamos los signos de los factores:

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	- - -	+ + +	+ + +
$x-2$	- - -	- - -	+ + +

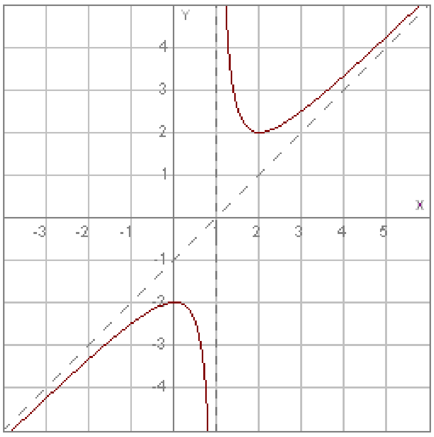
Es positivo en $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$.

La función es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(0,2)$.

Tendrá un máximo para x=0 y un mínimo en x=2.

Hacemos una tabla de valores y representamos.

x	y
-2	-3.33
-1	-2.5
0	-2
2	2
3	2.5
4	3.33



Representar gráficamente la función $f(x) = x-x^3$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

Derivamos dos veces la función:

$f'(x) = 1-3x^2$; $f''(x) = -6x$.

La función es creciente si su derivada es positiva:

$1-3x^2 > 0$; $3x^2-1 < 0$; $3x^2 < 1$; $x^2 < \frac{1}{3}$; $|x| < \sqrt{\frac{1}{3}}$; $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La función es creciente en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Como en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ la función pasa de decreciente a creciente, tiene un mínimo. Análogamente, para $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tiene un máximo.

La función es convexa si su 2ª derivada es positiva:

$-6x > 0$; $x < 0$.

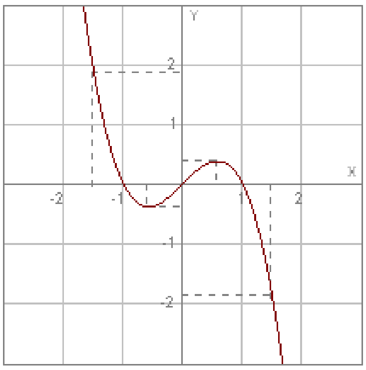
La función es convexa en $(-\infty,0)$ y cóncava en $(0,+\infty)$. Para $x=0$ tendrá un punto de inflexión.

También observamos que la función es impar, ya que $f(-x) = -x-x^3 = -f(x)$.

Corta al eje OX: $x-x^3 = 0$; $x\left(1-x^2\right) = 0$; $x(1-x)(1+x) = 0$; $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Hacemos una tabla de valores y representamos:

x	y
-1.5	1.88
-1	0
-0.58	-0.38
0	0
0.58	0.38
1	0
1.5	1.88



Sea f la función definida, para $x \neq 1$, por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$.

(1) Determinar las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.

(3) Esbozar la gráfica de f.

(1) A. Vertical. Como es una expresión racional, buscamos los valores que anulan al denominador:

$x^2-2x+1 = 0$; $(x-1)^2 = 0$; $x = 1$.

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

A. vertical. No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$.

A. Oblicua. Son las recta $y = mx+n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2.$$

La recta $y = x+2$ es asíntota oblicua.

Solución: Asíntota vertical, $x = 1$
Asíntota oblicua, $y = x+2$

(2) La función es creciente si su derivada es positiva:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}.$$

$$\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} > 0 \ ; \ \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} > 0 \ ; \ \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^2(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-1} > 0$$

Estudiamos los signos:

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	- - -	+ + +	+ + +
$x-3$	- - -	- - -	+ + +

Es positivo en $(-\infty,1)$ y $(3,+\infty)$.

En los intervalos anteriores la función es creciente, siendo en (1,3) decreciente.

Como en el 1 la función pasa de creciente a decreciente, pero no está definida. No tiene extremo en dicho punto.

Como en el 3 pasa de decreciente a creciente, tiene un mínimo.

Hallamos el transformado:

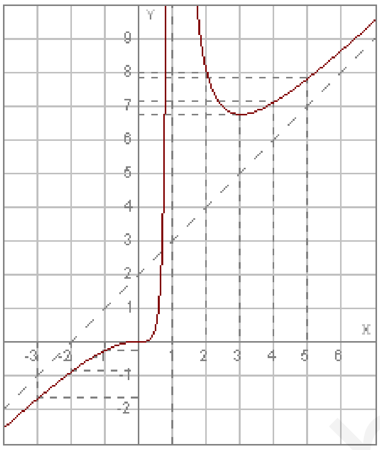
$$f(3) = \frac{27}{9-6+1} = \frac{27}{4}$$

Solución: Creciente en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. Decreciente en $(1,3)$.

Mínimo en $\left(3,\frac{27}{4}\right)$.

(3) Con la información anterior y una tabla de valores realizamos la gráfica:

x	y
-3	-1.69
-2	-0.89
-1	-0.25
0	0
2	8
3	6.75
4	7.11
5	7.81



Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$, para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

(1) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

(2) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(3) Con los datos obtenidos, esbozar la gráfica de f.

(1) A. vertical. Como es una fracción, hallamos los valores que anulan al denominador:

$$x^2-2x = 0 \;\; ; \;\; x(x-2) = 0 \;\; ; \;\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Como para esos valores es $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, las rectas $x = 0$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

A. horizontal. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{9x-3}{x^2-2x} = 0$. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

A. Oblicua. No tiene (tiene horizontal).

Solución: Asíntota horizontal, $y = 0$.
Asíntotas verticales, $x = 0$, $x = 2$.

(2) Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{9\left(x^2-2x\right)-(9x-3)(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)^2} = \frac{9x^2-18x-18x^2+18x+6x-6}{\left(x^2-2x\right)^2} = \frac{-9x^2+6x-6}{\left(x^2-2x\right)^2}$$

La función es creciente si su derivada es postiva:

$$\frac{-9x^2+6x-6}{\left(x^2-2x\right)^2} > 0 \Rightarrow -9x^2+6x-6 > 0 \Rightarrow 9x^2-6x+6 < 0.$$

Descomponemos en producto y estudiamos los signos de los factores.

Resolvemos la ecuación: $9x^2-6x+6 = 0 \;\; ; \;\; x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-216}}{18}$. Imposible.

Como la expresión no admite descomposición, siempre toma el mismo signo.

Damos un valor. Si $x = 0$, se cumple: $0-0+6 > 0 \Rightarrow$ La expresión siempre es positiva.

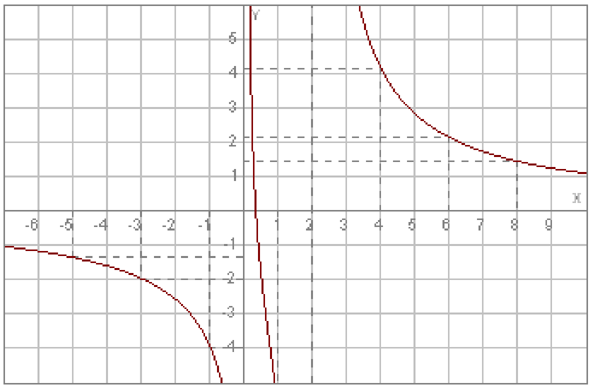
Como debe ser $9x^2-6x+6 < 0$, nunca se cumplirá. Es decir la función nunca es creciente.

Solución: Decreciente en su dominio.

(3) Como la derivada no se anula, no tiene extremos relativos. Completamos el estudio dando algunos valores:

x	y
-5	-1.37
-3	-2
-1	-4
1	-6

4	4.13
6	2.13
8	1.44



Se considera la función f definida para $x \neq 0$ por la relación $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+4}{x}$.

(1) Hallar sus asíntotas.

(2) Determinar sus extremos locales.

(3) Dibujar la gráfica de f indicando su posición respecto a las asíntotas.

(1) A. vertical. Como se anula el denominador para $x = 0$, será $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$, luego la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

A. horizontal. No tiene, ya que es $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$.

A. oblicua. Son las recta $y = mx+n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+4}{x^2} = 4.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{4x^2+3x+4}{x} - 4x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+4-4x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{x} = 3.$$

La recta $y = 4x+3$ es asíntota oblicua.

Solución: Asíntota vertical, $x = 1$.
Asíntota oblicua, $y = 4x+3$.

(2) Derivamos dos veces:

$$f'(x) = \frac{(8x+3)x-(4x^2+3x+4)}{x^2} = \frac{8x^2+3x-4x^2-3x-4}{x^2} = \frac{4x^2-4}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{8x\cdot x^2-(4x^2-4)2x}{x^4} = \frac{8x\cdot x-(4x^2-4)2}{x^3} = \frac{8x^2-8x^2+8}{x^3} = \frac{8}{x^3}$$

Los extremos anulan la derivada:

$$\frac{4x^2-4}{x^2} = 0 \; ; \; 4x^2-4 = 0 \; ; \; x^2-1 = 0 \; ; \; x^2 = 1 \; ; \; x = \pm 1.$$

Estudiamos los signos en la 2ª derivada:

$f''(-1) = -8 < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow$ es un mínimo.

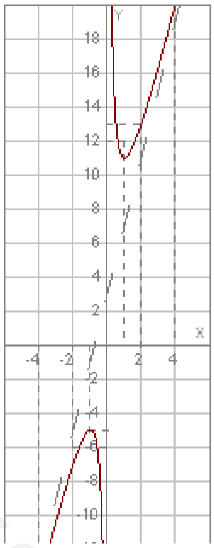
Solución: Máximo en $x = -1$. Mínimo en $x = 1$.

(3) Podemos estudiar la concavidad con el signo de la 2ª derivada:

$\dfrac{8}{x^3} > 0 \Rightarrow x > 0$. La función es convexa en $(0,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,0)$. Para $x = 0$ tendrá un punto de inflexión.

Contruimos una tabla de valores y representamos:

x	y
-4	-14
-2	-6
-1	-5
1	12
2	13
4	20



Vemos en la gráfica que la función está sobre la asíntota oblicua para $x > 0$.

Podemos estudiar la posición comprobando el signo que toma la función diferencia:

Sea $g(x) = 4x+3$. Estudiamos el signo la función $h(x) = f(x)-g(x)$.

$$h(x) = \frac{4x^2+3x+4}{x} - (4x+3) = \frac{4x^2+3x+4-4x^2-3x}{x} = \frac{4}{x}$$

La función es positiva si $h(x) > 0$; $\frac{4}{x} > 0$; $x > 0$.

Si $x > 0$, es $f(x)-g(x) > 0$; $f(x) > g(x)$, la gráfica de la función está por encima de la asíntota.

Representar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, asíntotas y concavidad y convexidad.

La función está definida si el radicando no es negativo:

$$x^2-4 \geq 0 \;;\; x^2 \geq 4 \;;\; |x| \geq 2 \;;\; \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Derivamos dos veces la función:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}-x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-4}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{\dfrac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}$$

Crecimiento. Debe ser $f'(x) > 0$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0 \Rightarrow x > 0 \quad \text{(el denominador es positivo)}$$

La función es creciente en $(2,+\infty)$. Será decreciente en $(-\infty,-2)$.

Extremos. No tiene, ya que la derivada no se hace cero (para x=0 no está definida).

Convexidad. La función es convexa si $f''(x) > 0$.

$$\frac{-4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}} > 0.$$ Nunca se cumple $\left(|x| > 2\right)$. La función siempre es cóncava.

Asíntotas.

Horizontal. No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$.

Vertical. No tiene. No existe ningún valor a que haga $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Oblicua. Son las rectas $y = mx+n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = \sqrt{1} = \pm 1.$$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx]$. Tenemos dos opciones:

$$m = 1.\ n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4} - x\right)\left(\sqrt{x^2-4} + x\right)}{\sqrt{x^2-4} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - x\right) = +\infty$ Asíntota oblicua a la derecha $y = x$

$$m = -1.\ n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4} + x\right) = +\infty$$

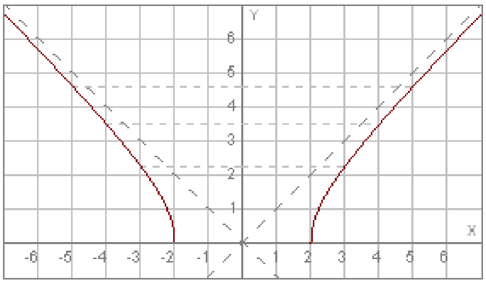
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}{\sqrt{x^2-4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}-x}=0$$

Asíntota oblicua a la izquierda $y = -x$.

La función es par, ya que $f(-x) = f(x)$.

Construimos una tabla de valores y representamos:

x	y
-5	4.58
-4	3.46
-3	2.24
-2	0
2	0
3	2.24
4	2.46
5	4.58



Representar gráficamente la función $f(x) = e^{1-x^2}$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

La función está definida para todos los números reales.

Para hacer el estudio, derivamos dos veces:

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2} \;;\; f''(x) = -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = \left[4x^2-2\right]e^{1-x^2}.$$

Crecimiento. Debe ser $f'(x) > 0$.

$-2xe^{1-x^2} > 0 \Rightarrow -2x > 0$; $x < 0$. La función es creciente en $(-\infty,0)$. Decrece en $(0,+\infty)$.

Extremos. Debe ser $f'(x) = 0$.

$-2xe^{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Como es $f''(0) = -2e^1 = -2e < 0$, tiene un máximo en $x = 0$.

Convexidad. Debe ser $f''(x) > 0$.

$$\left[4x^2-2\right]e^{1-x^2} > 0 \Rightarrow 4x^2-2 > 0 \;;\; x^2 > \frac{1}{2} \;;\; |x| > \sqrt{\frac{1}{2}} \;;\; |x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; \begin{cases} x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

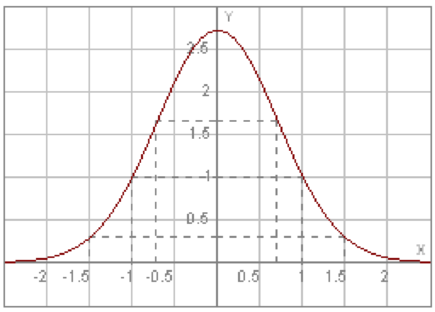
La función es convexa en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. Es cóncava en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Los valores $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ son puntos de inflexión.

La función es par, ya que $f(-x) = f(x)$.

Con la información anterior y una tabla de valores, representamos:

x	y
-1.5	0.29
-1	1
-0.71	1.65
0	2.72
0.71	1.65
1	1
1.5	0.29



Representar gráficamente la función $f(x) = sen^2x$, indicando razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

Derivamos dos veces la función:

$f'(x) = 2senxcosx = sen2x$; $f''(x) = 2cos2x$

Crecimiento. La derivada debe ser positiva:

$sen2x > 0$. El seno es positivo en el 1^er y 2º cuadrantes:

$0+2k\pi < 2x < \pi+2k\pi$; $k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$.

La función es creciente en $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in Z$.

Será decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, (k+1)\pi\right)$, $k\in Z$.

Extremos. La derivada se anula si:

$$sen2x = 0 \ ; \ 2x = \begin{cases} 0+2k\pi \\ \pi+2k\pi \end{cases} \ ; \ x = \begin{cases} k\pi \\ \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$$

Comprobamos el signo en la 2ª derivada:

$f''(k\pi) = 2cos2k\pi = 2\cdot1 = 2 < 0 \Rightarrow$ es un mínimo.

$f''\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 2cos(\pi+2k\pi) = 2cos\pi = 2(-1) < 0 \Rightarrow$ es un máximo.

Concavidad. La función es cóncava si su 2ª derivada es negativa:

$2cos2x < 0$; $cos2x < 0$. El coseno es negativo en el 2ª y 3^er cuadrante:

$\frac{\pi}{2}+2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+k\pi$.

La función es cóncava en $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$, $k\in Z$.

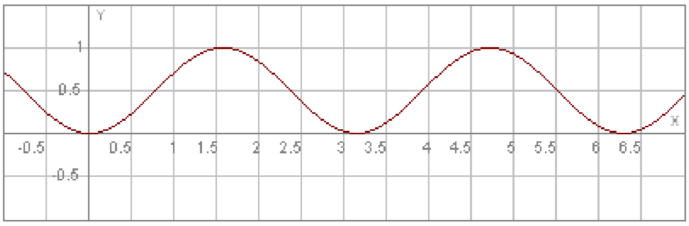
Será convexa en $\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+(k+1)\pi\right)$, $k\in Z$.

La función es par: $f(-x) = sen^2(-x) = [sen(-x)]^2 = [-senx]^2 = sen^2x = f(x)$.

La función es periódica, de periodo π.

Creamos una tabla de valores y representamos:

x	0	$\frac{\pi}{4}\approx0.79$	$\frac{\pi}{2}\approx1.57$	$\frac{3\pi}{4}\approx2.36$	$\pi\approx3.14$	$\frac{5\pi}{4}\approx3.92$
y	0	0.5	1	0.5	0	0.5


Y
1
0.5
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
X
-0.5