DERIVABILIDAD

1. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{3x^2-9x} & , \quad x \notin \{0,3\} \\ \dfrac{2}{3} & , \quad x = 3 \end{cases}$

2. Considerar la función $f:\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = |x+3|$.

(1) Estudiar la derivabilidad de f.

(2) Dibujar las gráficas de f y f'.

3. Se considera la función $f:[1,+\infty) \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = |x-2| + \sqrt{x-1}$. Calcular, de manera razonada, su función derivada.

4. Sea $f:(-\pi,\pi) \rightarrow \Re$ la función derivable que para $x \neq 0$ verifica $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{sen} x}$ (siendo lnx el logaritmo neperiano de x).

(1) ¿Cuánto vale f(0)?

(2) ¿Cuánto vale f'(0)?

5. Calcular a y b para que sea derivable la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ ax+b & , x \geq 1 \end{cases}$

6. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x & , x \leq 1 \\ ax^2+b(x-1) & , x > 1 \end{cases}$

(1) ¿Para qué valores de a y b es continua la función?

(2) ¿Para qué valores es derivable?

7. (1) Hallar a y b para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & , \quad x \leq 0 \\ ax+b & , 0 < x < 2 \\ 3x-5 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

(2) Estudiar la derivabilidad de la función resultante en los puntos 0 y 2.

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si} \quad x < 7 \\ ax+4 & \text{si } 7 \leq x < 10 \end{cases}$, determinar:

(1) El valor de a para que f sea continua en x = 7.

(2) La gráfica de f.

(3) Dominio y recorrido de f.

(4) Derivada de f en x=7 y x=9.

9. La función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

(1) ¿Cuánto vale a?

(2) Para dicho valor de a, ¿cuánto vale f'(3)?

10. Una vía del ferrocarril transcurre por un terreno llano de manera que su trazado coincide con el de la recta y = 1, para $x \leq 0$. A partir del punto x=0, su trazado coincide con el de la curva $y=(ax+b)e^{-x}$. Sabiendo que el trazado de la vía admite recta tangente en todos sus puntos, ¿Cuánto vale a y b?

Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{3x^2-9x} & , x \notin \{0,3\} \\ \dfrac{2}{3} & , \quad x = 3 \end{cases}$

La función está definida en $\Re$, ya que los valores que anulan al denominador de la 2ª expresión (0 y 3) se transforman aparte. Comprobemos que para esos valores la función es continua:

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x(x-3)}{3x^2-9x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x(x-3)}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

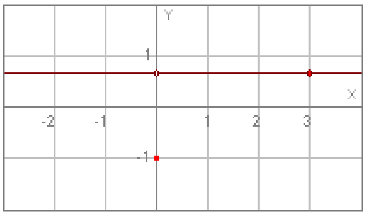
   Como es $f(0) = -1 \Rightarrow$ La función no es continua en el 0.

2. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x(x-3)}{3x^2-9x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x(x-3)}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

   Como es $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow$ La función es continua en el 3.

La función puede expresarse, simplificando la 2ª expresión, de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \;, & x = 0 \\ \dfrac{2}{3} \;, & x \notin \{0,3\} \\ \dfrac{2}{3} \;, & x = 3 \end{cases} = \begin{cases} -1 \;, & x = 0 \\ \dfrac{2}{3} \;, & x \neq 0 \end{cases}$$



Si hallamos la derivada: $f'(x) = 0 \; (x \neq 0)$

Solución: Derivable en $\Re - \{0\}$

Considerar la función $f:\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}$ definida por $f(x) = |x+3|$.

(1) Estudiar la derivabilidad de f.

(2) Dibujar las gráficas de f y f'.

Expresamos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3) \ , \ x+3 < 0 \\ x+3 \ , \ x+3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x-3 \ , \ x < -3 \\ x+3 \ , \ x \geq -3 \end{cases}$$

(**1**) La función es continua en el -3, ya que $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = 0$.

Calculamos la función derivada (excepto en el -3) y hallamos derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \ , \ x < -3 \\ 1 \ , \ x > -3 \end{cases}$$

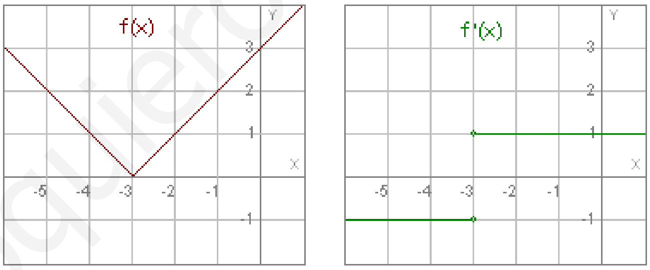
$$\left. \begin{array}{r} f'(-3^-) = -1 \\ f'(-3^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No es derivable en el -3.}$$

Solución: Derivable en $\mathfrak{R}$ - {-3}

(**2**) Las expresiones de f son rectas y la de f' son constantes:

x	-x-3
-3	0
-4	1
-5	2

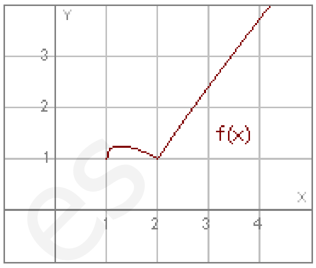
x	-x-3
-3	0
-2	1
-1	2



Se considera la función $f:[1,+\infty)\to\Re$ definida por $f(x) = |x-2|+\sqrt{x-1}$. Calcular, de manera razonada, su función derivada.

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)+\sqrt{x-1} & , x-2 < 0 \ (x\geq 1) \\ x-2+\sqrt{x-1} & , \quad x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+2+\sqrt{x-1} & , 1 \leq x < 2 \\ x-2+\sqrt{x-1} & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

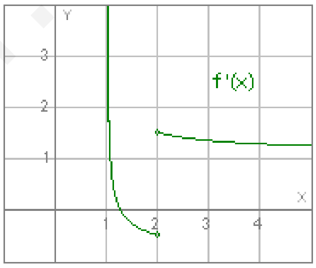


Las dos expresiones son continuas en su dominio.

La función es continua en el 2, ya que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = |2-2|+\sqrt{2-1} = 1$.

Calculamos la derivada (excepto en el 2):

$$f'(x) = \begin{cases} -1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & , 1 < x < 2 \\ 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & , \quad x > 2 \end{cases}$$



Hallamos las derivadas laterales en el 2:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ f'(2^+) = 1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe derivada en el 2.}$$

Solución: $f'(x) = \begin{cases} -1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & , 1 < x < 2 \\ 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & , \quad x > 2 \end{cases}$

Sea $f:(-\pi,\pi)\rightarrow\Re$ la función derivable que para $x\neq 0$ verifica $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{sen} x}$ (siendo lnx el logaritmo neperiano de x).

(1) ¿Cuánto vale f(0)?

(2) ¿Cuánto vale f'(0)?

(**1**) Como la función es derivable, debe ser continua, por lo que debe cumplirse: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Calculamos el límite:

Como es $x\rightarrow 0 \Rightarrow x^2\rightarrow 0 \Rightarrow \ln\left(1+x^2\right) \sim x^2$ y $\operatorname{sen}x \sim x$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

> El los límites con funciones trascendentes, usamos las equivalencias:

$v\rightarrow 0$	
sen v	v
tag v	v
ln(1+v)	v

Solución: $f(0) = 0$.

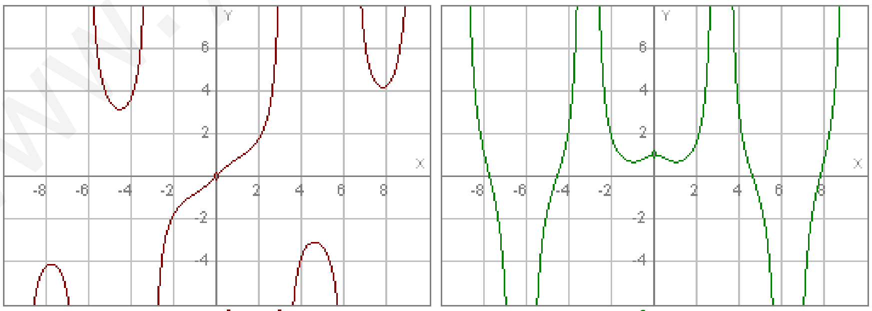
(**2**) Hallamos la derivada en el 0:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{sen}x}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x\cdot\operatorname{sen}x}$$

Según las equivalencias anteriores:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Solución: $f'(0) = 1$.

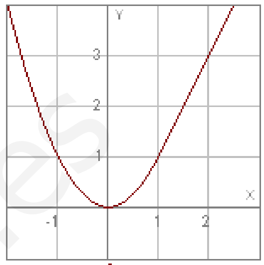


$f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{senx}}$ $\qquad$ $f'(x)$

Calcular a y b para que sea derivable la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ ax+b & , x \geq 1 \end{cases}$

Si queremos que sea derivable, la función ha de ser continua, por lo que debe tener límite. Calculamos el límite en el 1:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax+b) = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Debe ser } a+b = 1.$$



$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ 2x-1 & , x \geq 1 \end{cases}$

La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < 1 \\ a & , x \geq 1 \end{cases}$.

Como es derivable en el 1, si hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior:

$2+b = 1$; $b = -1$.

Solución: $a = 2$; $b = -1$.

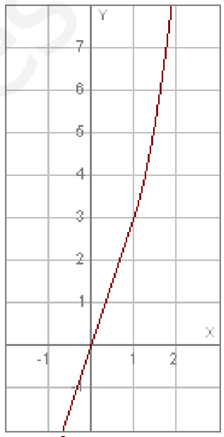
Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x & , x \le 1 \\ ax^2+b(x-1) & , x > 1 \end{cases}$

(1) ¿Para qué valores de a y b es continua la función?

(2) ¿Para qué valores es derivable?

(**1**) Las expresiones que forman la función son continuas. Queda por ver la continuidad en el 1. Hallamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[ax^2+bx-b\right] = a+b-b = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3.$$



$f(x) = \begin{cases} 3x & , x \le 1 \\ 3x^2-3x+3 & , x > 1 \end{cases}$

Como el valor de b no interviene, queda:

Solución: a = 3 ; b, cualquier valor.

(**2**) La función es: $f(x) = \begin{cases} 3x & , x \le 1 \\ 3x^2+b(x-1) & , x > 1 \end{cases}$

Derivando: $f'(x) = \begin{cases} 3 & , x \le 1 \\ 6x+b & , x > 1 \end{cases}$

Como es derivable en el 1, las derivadas laterales deben coincidir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 6+b \end{array}\right\} \Rightarrow 6+b = 3 \;\; ; \;\; b = -3.$$

Solución: a = 3 ; b = -3.

(1) Hallar a y b para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \le 0 \\ ax+b, & 0 < x < 2 \\ 3x-5, & x \ge 2 \end{cases}$

(2) Estudiar la derivabilidad de la función resultante en los puntos 0 y 2.

(**1**) Para que sea continua, debe tener límite. Calculamos los límites laterales en 0 y 2:

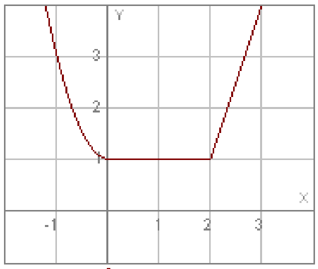
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[2X^2+1\right] = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax+b) = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-5) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+b = 1.$$

Como es $b = 1$, queda: $2a+1 = 1$; $2a = 0$; $a = 0$.

Solución: $a = 0$; $b = 1$.

(**2**) La función queda: $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 3x-5, & x \ge 2 \end{cases}$



$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 3x-5, & x \ge 2 \end{cases}$

Derivamos la función, excepto en el 0 y el 2:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable en el 0 y el 2, las derivadas laterales deben coincidir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = 0. \text{ Es derivable en el 0.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 0 \\ f'(2^+) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No es derivable en el 2.}$$

Solución: $f'(0) = 0$; no tiene derivada para $x = 2$.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} |3-x| \text{ si } & x<7 \\ ax+4 \text{ si } & 7\le x<10 \end{cases}$, determinar:

(1) El valor de a para que f sea continua en x = 7.

(2) La gráfica de f.

(3) Dominio y recorrido de f.

(4) Derivada de f en x=7 y x=9.

Expresamos el valor absoluto por intervalos:

$$|3-x| = \begin{cases} -(3-x) & ,\ 3-x<0 \\ 3-x & ,\ 3-x\ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -3+x & ,\ 3<x \\ 3-x & ,\ 3\ge x \end{cases}$$

Escribimos, de forma ordenada, estos intervalos en la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & ,\quad x\le 3 \\ x-3 & ,\ 3<x<7 \\ ax+4 & ,\ 7\le x<10 \end{cases}$$

(**1**) Para que sea continua en el 7, los límites laterales deben coincidir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^-} (x-3) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} (ax+4) = 7a+4 \end{array}\right\} \Rightarrow 7a+4=4 \ ;\ 7a=0 \ ;\ a=0.$$

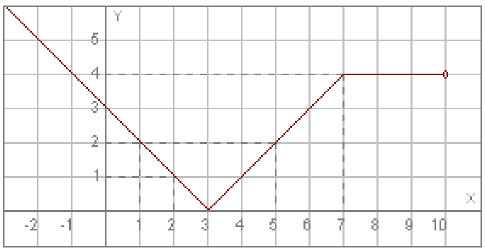
Solución: $a = 0$.

(**2**) La función queda: $f(x) = \begin{cases} -x+3 & ,\quad x\le 3 \\ x-3 & ,\ 3<x<7 \\ 4 & ,\ 7\le x<10 \end{cases}$

Como son rectas, damos valores y representamos:

x	-x+3
3	0
2	1
1	2

x	x-3
3	0
5	2
7	4



(**3**) Las expresiones estan definidas para todos los valores de los intervalos de deficnición, el dominio será $(-\infty,10)$.

Como la función valor absoluto es positiva y la segunda expresión es constante, el recorrido serán todos los números no negativos: $[0,+\infty)$.

Solución: Dominio: $(-\infty,10)$. Recorrido: $[0,+\infty)$

(**4**) Vemos por la gráfica, que no existe la derivada en el 7 y que es f'(9) = 0.

Si calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -1 & ,\quad x<3 \\ 1 & ,\ 3<x<7 \\ 0 & ,\ 7<x<10 \end{cases}$

Si hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{r} f'(7^-) = 1 \\ f(7^+) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe } f'(7).$$

Solución: No existe $f'(7)$; $f'(9) = 0$.

EJERCICIO 9

La función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

(1) ¿Cuánto vale a?

(2) Para dicho valor de a, ¿cuánto vale $f'(3)$?

(**1**) Como la función es derivable, debe ser continua. Si calculamos el límite en el 3:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} = \frac{0}{0}.$$ Indeterminado. Simplificamos por $(x-3)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-a)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-a) = 3-a$$

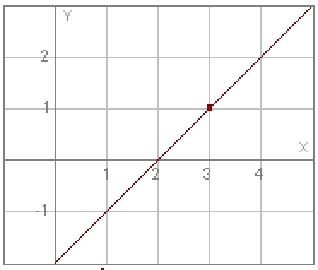
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -a-3 & 3a \\ 3 & & 3 & -3a \\ \hline & 1 & -a & \boxed{0} \end{array}$$

Como debe coincidir con el transformado:

$3-a = 1$; $a = 2$.

Solución: $a = 2$.

(**2**) La función queda: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$.



$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

Calculamos la derivada en el 3:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}-1}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{x^2-5x+6-x+3}{x-3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{(x-3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} 1 = 1.$$

Solución: $f'(3) = 1$.

Una vía del ferrocarril transcurre por un terreno llano de manera que su trazado coincide con el de la recta $y = 1$, para $x \le 0$. A partir del punto $x=0$, su trazado coincide con el de la curva $y=(ax+b)e^{-x}$. Sabiendo que el trazado de la vía admite recta tangente en todos sus puntos, ¿Cuánto vale a y b?

Escribimos la función cuya gráfica es el trazado de la vía:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \le 0 \\ (ax+b)e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$$

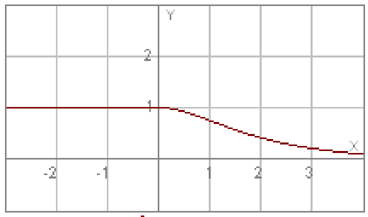
Como la función es derivable, debe ser continua. Si hallamos los límites laterales en el 0:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax+b)e^{-x} = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1.$$

Derivamos la 2ª expresión (b=1), $y = (ax+1)e^{-x}$:

$$y' = ae^{-x}+(ax+1)e^{-x}(-1) = ae^{-x}-(ax+1)e^{-x} = (a-ax-1)e^{-x}$$

La función derivada será: $f'(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ (a-ax-1)e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \le 0 \\ (x+1)e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$$

Como deben coincidir las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a-1 = 0 \;\; ; \;\; a = 1$$

Solución: a = 1 ; b = 1.