

1.- Dado el punto $P(2, 4, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$, se pide:

- a) Calcula la distancia del punto P a la recta r .
- b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a r .

2.- a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

esté contenida en el plano $\pi: x + 2y + z = 7$.

- b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' , que corte perpendicularmente a π , de modo que la intersección de ambos planos sea r .

3.- a) Dado el plano $\pi: 7x - 4y - 4z - 3 = 0$ y la recta $r: \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$, hallar

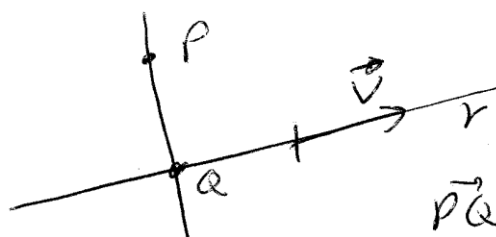
los puntos de r cuya distancia a π es 3 unidades.

- b) Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi: 2x + 4y + 4z - 5 = 0$, cuya distancia a éste sea 3 unidades.

4.- Hallar un punto D perteneciente a la recta $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$, sabiendo que forma con los puntos $A = (1, 1, 1)$; $B = (4, 3, 2)$ y $C = (1, 3, -1)$, un tetraedro cuyo volumen vale 1.

Nota: El valor de cada ejercicio es de 2,5 puntos.

$$1) P(2,4,1), r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases} = \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=3-2t \end{cases}$$



$$Q \in r \rightarrow Q = (1, 1, 3-2t)$$

$$\vec{PQ} = (1-2, 1-4, 2-2t)$$

$$\vec{PQ} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (1-2, 1-4, 2-2t) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

$$\boxed{t = \frac{5}{3}}$$

$$\rightarrow Q = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right), \vec{PQ} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$a) d(P, r) = |\vec{PQ}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{22}{3}}$$

$$b) S \equiv \begin{cases} P(2,4,1) \\ \vec{w} = \vec{PQ} = (1,7,4) \end{cases} = \begin{cases} x=2+t \\ y=4+7t \\ z=1+4t \end{cases}$$

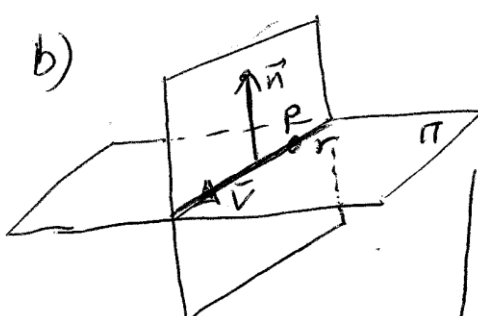
$$2) a) r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=k-t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \pi \equiv x+2y+z=7$$

$$\vec{v} \in r \rightarrow \vec{v} = (1, -1, 1), \vec{n} \in \pi \rightarrow \vec{n} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, -1, 1) \cdot (1, 2, 1) = 0 \Rightarrow r \parallel \pi$$

Para que este contenido P también debe pertenecer a π

$$\Rightarrow P = (1, k, 0) \rightarrow \pi \rightarrow 1+2k+0=7 \rightarrow \boxed{k=3}$$

$$b) \pi' = \begin{cases} \vec{v} = (1, -1, 1) \\ \vec{n} = (1, 2, 1) \\ P = (1, 3, 0) \end{cases}$$


$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{\pi' = x-z-1=0}$$

$$3) \pi \equiv 7x - 4y - 4z - 3 = 0, r \equiv \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

a) Primero comprobemos rápidamente la posición relativa de π y r :

$$\vec{n} \in \pi \quad \vec{n} = (7, -4, -4) \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow r \parallel \pi$$

$$\vec{v} \in r \quad \vec{v} = (0, 1, -1)$$

Calculemos la distancia de r a π , porque puede que no sea 3:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|7(-1) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-4)^2}} = \frac{18}{9} = 2$$

Conclusión: no hay ningún punto de r que diste 3 de π .

b) Como son paralelos serán de la forma $2x + 4y + 4z + D' = 0$

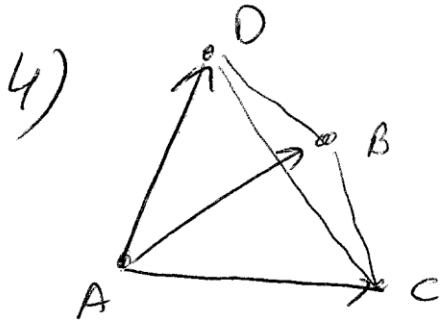
$$\text{aplicando } d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\rightarrow \frac{|-5 - D'|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = 3 \rightarrow |-5 - D'| = 18$$

$$-5 - D' = 18 \rightarrow D' = -23 \rightarrow \pi'_1 \equiv 2x + 4y + 4z - 23 = 0$$

$$5 + D' = 18 \rightarrow D' = 13 \rightarrow \pi'_2 \equiv 2x + 4y + 4z + 13 = 0$$

—————○—————



$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

$$D \in r \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4-2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4+\lambda \end{cases} \Rightarrow D = (4-2\lambda, \lambda, -4+\lambda)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (3, 2, 1), \vec{AC} = (0, 2, -2), \vec{AD} = (3-2\lambda, \lambda-4, -5+\lambda)$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3-2\lambda & \lambda-4 & -5+\lambda \end{vmatrix} = 1$$

$$6(-5+\lambda) - 4(3-2\lambda) - 2(3-2\lambda) + 6(\lambda-4) = 6 \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow D = \left(-1, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$