

ALUMNO: _____

1.- Dada la función $f(x) = x^2 + x + 1$. Calcular $f'(2)$ utilizando la definición de derivada.

(1,5 puntos)

2.- Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisa $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, halla la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada. Hallar también la ecuación de la normal por ese punto (por el de tangencia).

(1,5 puntos)

3.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva de ecuación $y = \ln(x^2 - 3)$ en el punto de abscisa $x = 2$

(1 punto)

4.- Deriva las siguientes funciones:

a) $y = \frac{\ln x + 4}{e^x}$

(1 punto)

b) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^3}}$

(1 punto)

c) $y = \frac{x}{\sin(\cos x)}$

(1 punto)

d) $y = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

(1 punto)

e) $y = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$

(1 punto)

f) $y = \arctg \frac{1+x}{1-x} - \arctg x$

(1 punto)

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + (2+h) + 1 - 7}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 2 + h + 1 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 5h + \cancel{7} - \cancel{7}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(h+5)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 5 = 5 \\
 &\quad \text{--- 0 ---}
 \end{aligned}$$

2. $y = -x^2 + 4x$ Calculemos la recta secante

$$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 3 \quad P(1, 3)$$

$$x_2 = 4 \rightarrow y_2 = 0 \quad Q(4, 0)$$

$$\vec{PQ} = (3, -3)$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-3} \rightarrow -3x+3 = 3y-9 \rightarrow 3y = -3x+12 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y = -x + 4} \rightarrow m = -1 \text{ pendiente igual por ser paralelas.}$$

La recta tangente será:

$$f'(x) = -2x + 4 = -1 \quad x_0 = \frac{5}{2} \rightarrow y_0 = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow \boxed{y - \frac{15}{4} = (-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)}$$

.../...
①

La recta normal será: $y - y_0 = -\frac{1}{m} (x - x_0)$

$$\boxed{y - \frac{15}{4} = +1 \left(x - \frac{5}{2} \right)}$$

— o —

3. $y = \ln(x^2 - 3)$, $x_0 = 2$

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 3} \quad y'(2) = \frac{4}{4 - 3} = 4 = m$$

$$y_0 = \ln(2^2 - 3) = \ln 1 = 0 \quad P(2, 0)$$

→ recta tangente $\boxed{y - 0 = 4(x - 2)}$

— o —

4. a) $y = \frac{\ln x + 4}{e^x}$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - (\ln x + 4) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \left[\frac{1}{x} - \ln x - 4 \right]}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 4}{e^x} = \frac{1 - x \ln x - 4x}{x \cdot e^x}$$

$$4. b) y = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^3}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3}{x^3}}} \cdot \frac{2x \cdot x^3 - (x^2-3)3x^2}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^3}{x^2-3}} \cdot \frac{\cancel{x^2} [2x^2 - 3x^2 + 9]}{x^4} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^3}{x^2-3}} \cdot \frac{9-x^2}{x^4}$$

$$c) y = \frac{x}{\sin(\cos x)}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \sin(\cos x) - x \cos(\cos x) (-\sin x)}{\sin^2(\cos x)}$$

$$d) y = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\ln x / x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x \cdot x} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x} =$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x}$$

$$e) y = \frac{1}{(x^2+x+1)^5} = (x^2+x+1)^{-5}$$

$$y' = (-5)(x^2+x+1)^{-6} (2x+1) = \frac{-10x-5}{(x^2+x+1)^6}$$

$$f) y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \operatorname{arctg} x$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

— o —