OPCIÓN DE EXAMEN 1

Problema 1.1:

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 15x+20y=450 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:

A) Discutamos el sistema $\left.\begin{array}{l} 15x+20y=450 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=90 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$ en función de los valores de k:

La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2 ya que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$

La matriz ampliada del sistema es $(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 90 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$ con determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 90 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=12k-180-270+6k=18k-450=0 \quad\Leftrightarrow\quad k=25$$. Por tanto:

Si $k\neq 25$, $rango(A|b)=3\neq 2=rango(A)$ y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Si $k=25$, $rango(A|b)=2=rango(A)=$ número de incógnitas y el sistema es **compatible determinado** (con solución única).

En este caso:

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y=90\\x+y=25\\3x-2y=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=25\\3x+4y=90\\3x-2y=0\end{array}\right\} \underset{3^aF\leftrightarrow 3\cdot 1^aF-3^aF}{\overset{2^aF\leftrightarrow 2^aF-3\cdot 1^aF}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l}x+y=25\\y=15\\5y=75\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+15=25 \Rightarrow x=10\\y=15\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{Sol=\{(10,15)\}}$$

Por tanto, si $k=25$, necesitará **10** cajas de tipo A y **15** de tipo B para satisfacer el pedido.

B)

B1) $\left|A^{-1}\cdot B^2\right|=\left|A^{-1}\right|\cdot\left|B^2\right|=|A|^{-1}\cdot|B|^2=\dfrac{|B|^2}{|A|}=\dfrac{10^2}{-3}=\boxed{\dfrac{-100}{3}}$

Ya que el determinante de una matriz y la de su inversa, caso de existir, también son inversos.

B2) $\left|C\cdot B^t\right|=|C|\cdot\left|B^t\right|=6\cdot|A|\cdot|B|=6\cdot(-3)\cdot 10=\boxed{-180}$

Ya que, al multiplicar toda una fila por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número y el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

$$|A^{-1}\cdot B^2|=\boxed{\frac{-100}{3}};\ |C\cdot B^t|=\boxed{-180}$$

Problema 1.2:

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

A2. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

A3. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x-3$.

A4. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

B. [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}$ ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Solución:

A) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1) El punto de corte con el eje de ordenadas será $(0, f(0)) = \boxed{(0,5)}$.

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen a partir de las soluciones de $f(x) = 0$:

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (-1.19; 0)} \\ \boxed{\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (4.19; 0)} \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes: $(\mathbf{0}, \mathbf{5})$; $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (\mathbf{-1.19}, \mathbf{0})$; $\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (\mathbf{4.19}, \mathbf{0})$

A2) $f'(x) = -2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x < \frac{3}{2} \\ f'(x) < 0 \text{ si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$

El cambio en la monotonía se produce cuando $x = \frac{3}{2}$, que está en el dominio de la función, la función es continua y derivable en él. Por tanto, es un extremo. Al pasar la función de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo. Además: $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 5 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 5 = \frac{-9+18+20}{4} = \frac{29}{4}$.

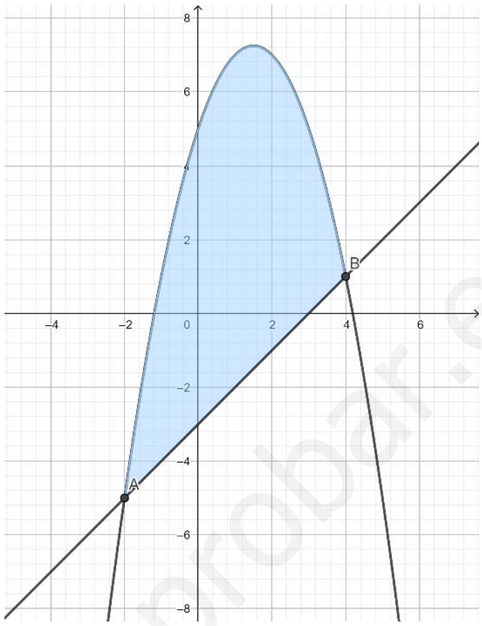
Por tanto:

f decreciente	$\left]\frac{3}{2}, \infty\right[$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{29}{4}\right)$ máximo relativo
f creciente	$\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$	

A3) Averiguamos los puntos de corte de ambas funciones resolviendo la ecuación $f(x)=g(x)$:

$$-x^2+3x+5=x-3 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=4 \end{cases}$$

Así pues, los puntos de corte son: $\begin{cases} A(-2,-5) \\ B(4,1) \end{cases}$



A4) El área de la región anterior se calcula mediante la integral definida de la diferencia de ambas:

$$\int_{-2}^{4}\left[\left(-x^2+3x+5\right)-\left(x-3\right)\right]dx=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+x^2+8x\right]_{x=-2}^{x=4}=$$

$$=\left[\frac{-64}{3}+16+32\right]-\left[\frac{8}{3}+4-16\right]=-24+60=\boxed{36\ u^2}$$

Área = **36** u^2.

B)

$$f(x)=\frac{x^2-\ 2x\ -12}{x^2-2x-15}$$

Esta función no será continua en los valores de x que hagan 0 el denominador, los calculamos:
$x^2-2x-15=0$, obtenemos:

$\boldsymbol{x=5}$ y $\boldsymbol{x=-3}$

Calculamos los límites de la función en estos valores:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}=\frac{9+6-12}{9+6-15}=\frac{3}{0}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}=\frac{25-10-12}{25-10-15}=\frac{3}{0}=\pm\infty\ ,$$

por tanto para estos valores la función presenta asíntotas verticales, es decir, la función tiene discontinuidades inevitables de primera especie de salto infinito.

La función es discontinua en $\boldsymbol{x=5}$ y $\boldsymbol{x=-3}$, y no hay forma de definirla para que sea continua en esos puntos.

Problema 1.3:

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea de 0,7?

Solución:

A) X = edad de los asistentes a un concierto de música clásica $\sim N(\mu, 3)$

M = muestra de **350** > 30 asistentes $\sim N\left(64.3; \frac{3}{\sqrt{350}}\right) = N(64.3; 0.16)$

Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.92 \Rightarrow \alpha = 0.08 \Rightarrow \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.96 = P\left[Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot 0.16 = 0.28$

Intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional: $I_\alpha =]64.3 - 0.28; 64.3 + 0.28[$

Intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional: $\boxed{I_\alpha =]64.02, 64.58[}$

B) Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99 = P\left[Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.325$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.7 \Rightarrow 9.96 \simeq \frac{6.975}{0.7} = \sqrt{n} \Rightarrow n \simeq 99.29$

El tamaño mínimo de la muestra para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ser:

$\boxed{\mathbf{100} \text{ personas}}$

OPCIÓN DE EXAMEN 2

Problema 2.1:

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos. ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Solución:

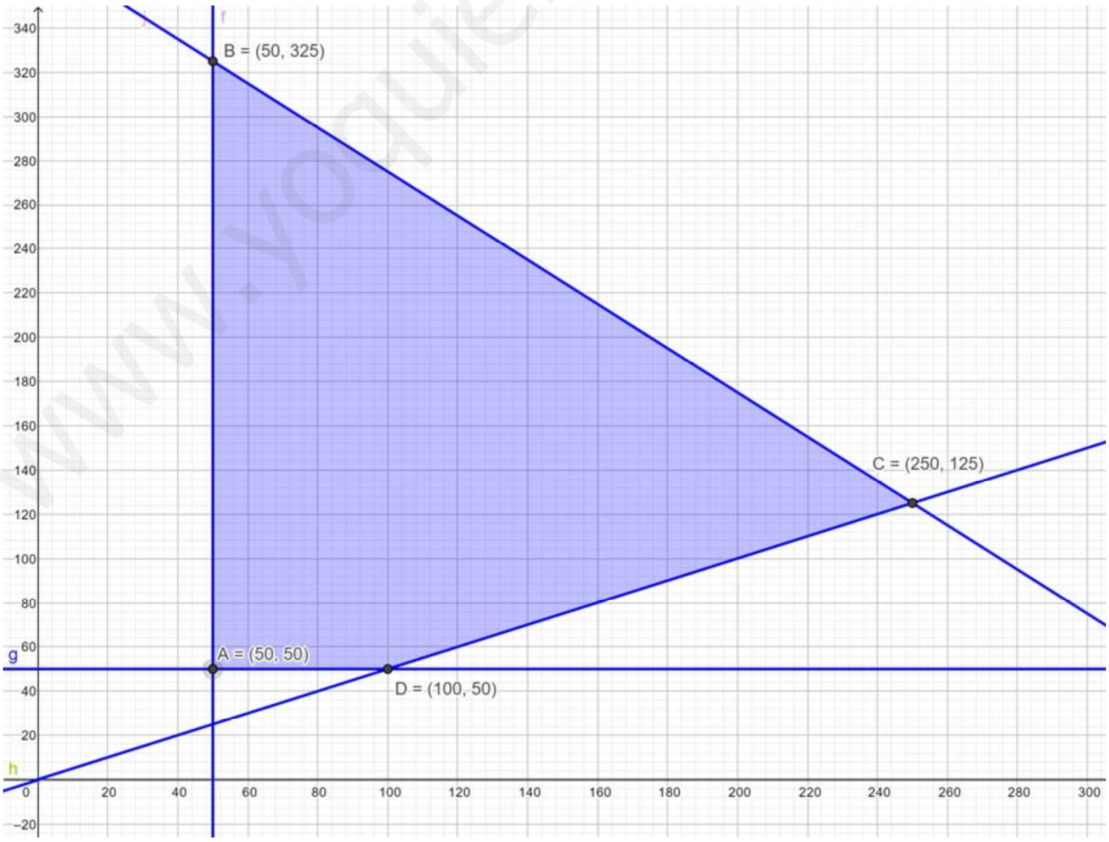
Llamemos x = número de rollos de estampado A e y = número de rollos de estampado B.

Las restricciones del problema quedarían expresadas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x + y \leq 375 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 375 \end{array}\right\}$$

La función de los ingresos que se quiere maximizar es: $f(x,y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$

Si dibujamos la región que determinan las restricciones obtenemos:



Los vértices del polígono son:

$$A \equiv \left.\begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \end{cases}\right\} \Rightarrow (50,50)$$

$$B \equiv \left.\begin{cases} x = 50 \\ x + y = 375 \quad \Rightarrow \quad 50 + y = 375 \quad \Rightarrow \quad y = 325 \end{cases}\right\} \Rightarrow (50,325)$$

$$C \equiv \left.\begin{cases} x + y = 375 \\ x - 2y = 0 \end{cases}\right\} \overset{\text{reducción de x}}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} 3y = 375 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 125 \\ x = 250 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (250,125)$$

$$D \equiv \left.\begin{cases} x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = 100 \\ y = 50 \end{cases}\right\} \Rightarrow (100,50)$$

Así pues, los puntos A(50,50); B(50,325); C(250,125) y D(100,50) son los candidatos a maximizar la función objetivo en dicha región. Veamos cuál es:

$$f(50,50) = [30x + 20y]_{\substack{x=50 \\ y=50}} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 50 = 1500 + 1000 = 2500 \text{ €}$$

$$f(50,325) = [30x + 20y]_{\substack{x=50 \\ y=325}} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 325 = 1500 + 6500 = 8000 \text{ €}$$

$$f(250,125) = [30x + 20y]_{\substack{x=250 \\ y=125}} = 30 \cdot 250 + 20 \cdot 125 = 7500 + 2500 = 10000 \text{ €}$$

$$f(100,50) = [30x + 20y]_{\substack{x=100 \\ y=50}} = 30 \cdot 100 + 20 \cdot 50 = 3000 + 1000 = 4000 \text{ €}$$

Conclusión:

El máximo ingreso se obtiene con **250** rollos de estampado tipo A y **125** rollos de estampado tipo B, siendo dicho ingreso de **10 000 €**.

Problema 2.2:

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -6x+3, & \text{si} \quad -4 < x < -2 \\ x^2+ax+5, & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \dfrac{x+15}{x+b} & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Solución:

A) Para que sea continua en $x = -2$ se debe cumplir que existan y sean iguales la imagen y el límite:

$$\left.\begin{aligned} & f(-2) = (-2)^2 + a\cdot(-2)+5 = -2a+9 \\ & \lim_{x\to -2^-}(-6x+3) = -6\cdot(-2)+3 = 12+3 = 15 \\ & \lim_{x\to -2^+}(x^2+ax+5) = (-2)^2 + a\cdot(-2)+5 = -2a+9 \end{aligned}\right\} \overset{\text{son iguales}}{\Rightarrow} \quad -2a+9 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a=-3}$$

Para que sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que existan y sean iguales la imagen y el límite:

$$\left.\begin{aligned} & f(0) = \frac{0+15}{0+b} = \frac{15}{b} \\ & \lim_{x\to 0^-}(x^2+ax+5) = 0^2 + a\cdot 0+5 = 5 \\ & \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+15}{x+b}\right) = \frac{0+15}{0+b} = \frac{15}{b} \end{aligned}\right\} \overset{\text{son iguales}}{\Rightarrow} \quad 5 = \frac{15}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{b=3}$$

Luego, la función será continua en $x = -2$ y $x = 0$ cuando $\boldsymbol{a = -3}$ y $\boldsymbol{b = 3}$.

B) $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} \quad \Rightarrow \quad Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+4x-21 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-7; 3\}$

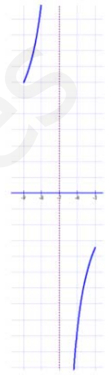
ya que $x^2+4x-21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{100}}{2} = \dfrac{-4\pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Por tanto, los únicos puntos donde puede haber asíntota vertical son aquellos que no están en el dominio.

Como el numerador de la fracción nunca se anula y siempre es positivo, el signo de la función será el mismo que el del denominador. Como este es un polinomio de segundo grado con dos raíces diferentes, el signo entre los ceros es el contrario al del coeficiente líder y los otros signos se alternan. Así pues, el signo es negativo entre –7 y 3 y positivo antes de –7 y después de 3.

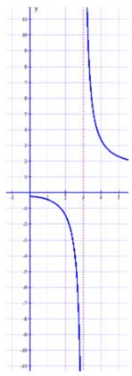
Teniendo en cuenta lo anterior, estudiemos ahora los límites en ambos puntos:

$x = -7$: $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left(\dfrac{103}{0^+}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -7^+} \dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left(\dfrac{103}{0^-}\right) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=-7} \text{ es una asíntota vertical.}$$



A la izquierda la función tiende a +∞ y a la derecha tiende a -∞.

$x = 3$: $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left(\dfrac{23}{0^-}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21} = \left(\dfrac{23}{0^+}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=3} \text{ es una asíntota vertical.}$$



A la izquierda la función tiende a -∞ y a la derecha tiende a +∞.

Las asíntotas verticales son: ***x* = –7** y ***x* = 3**

Problema 2.3:

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

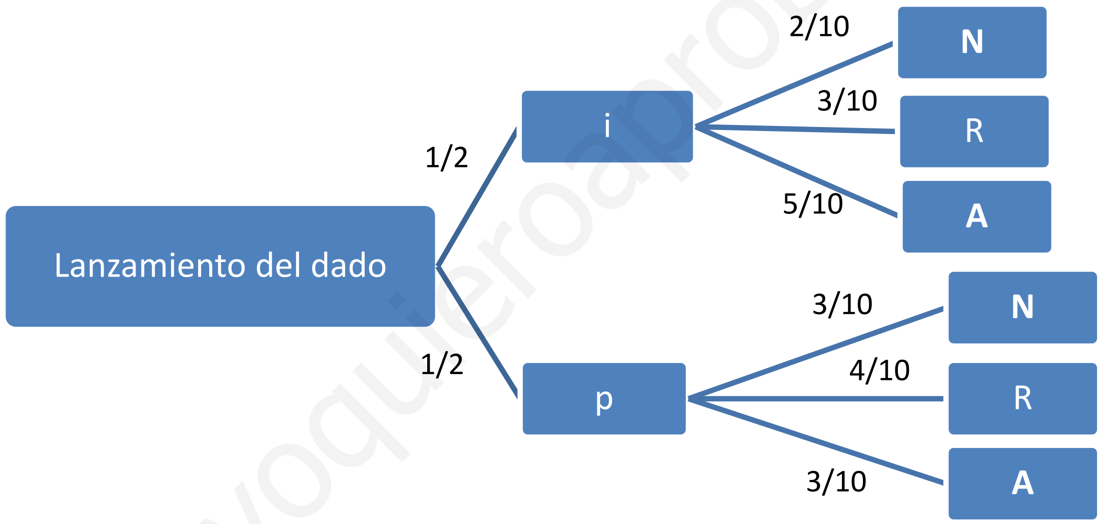
B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

i = "sacar impar en el dado", p = "sacar par en el dado", A = "sacar bola amarilla de la urna", N = "sacar bola negra de la urna" y R = "sacar bola roja de la urna"



A) $P(A) \overset{T^{\text{ma}}\text{ Prob. } total}{=} P(i)\cdot P(A/i)+P(p)\cdot P(A/p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{8}{20}=\frac{40}{100}=0.4 \;= 40\,\%$

B) $P(i/R) \overset{T^{\text{ma}}\ Bayes}{=} \frac{P(R/i)\cdot P(i)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{20}}=\frac{3}{7}\approx 0.429$

$$P(R) \overset{T^{\text{ma}}\text{ Prob. } total}{=} P(i)\cdot P(R/i)+P(p)\cdot P(R/p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$$

C) $P(A/p)=\frac{3}{10}=0.3 \;= 30\,\%.$

A) $P(A) \;= \mathbf{0.4}$; B) $P(i/R) \;= \mathbf{\frac{3}{7}}\approx 0.429$; C) $P(A/p)=\frac{3}{10}=\mathbf{0.3}$.