EXAMEN RESUELTO DE INTERPOLACIÓN

1. De una función se conocen los siguiente valores: $f(0)=2$, $f(1)=0$ y $f(2)=3$. Determina el polinomio que interpola estos puntos utilizando el polinomio de Lagrange.

Solución:

- Los puntos por los que tiene que pasar el polinomio interpolador son: A(0,2), B(1,0) y C(2,3), por lo que el polinomio de Lagrange será:

$P(x)=P_A(x)+P_B(x)+P_C(x)$, en donde $P_A(x)$, $P_B(x)$ y $P_C(x)$ están dados por:

$$P_A(x)=\frac{(x-x_B)(x-x_C)}{(x_A-x_B)(x_A-x_C)}\cdot y_A=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\cdot 2=\frac{(x^2-3x+2)\cdot 2}{2}=x^2-3x+2$$

$$P_B(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\cdot 0=0$$

$$P_C(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\cdot 3=\frac{3}{2}(x^2-x)\ .$$

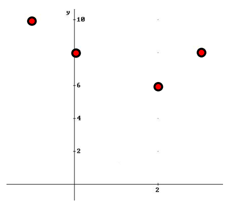
Así que:

$$P(x)=x^2-3x+2+\frac{3x^2}{2}-\frac{3x}{2}\Rightarrow P(x)=\frac{5x^2}{2}-\frac{9x}{2}+2$$

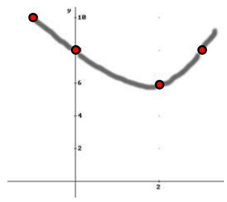
2. ¿Es posible que exista una función de interpolación cuadrática que pase por los puntos (2,6), (0,8), (3,8) y (-1 , 10)?

Solución:

- Representamos los puntos en el plano cartesiano.



- Observamos que es posible trazar una curva parabólica o cuadrática que una a todos. Ello quiere decir que sí es posible que exista una función de interpolación cuadrática que pase por esos puntos.



3. Halla el polinomio de interpolación cuadrática correspondiente a los datos de la tabla y completa la tabla:

x	-1	0	1	2	3
y	9		1		17

Solución:

- Vamos a construir el polinomio interpolador cuadrático de los puntos A(-1,9), B(1,1) y C(3,17), el cual está dado por la función $y(x)=ax^2+bx+c$. Los coeficientes a, b y c los obtenemos resolviendo el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_A(x)=ax_A^2+bx_A+c \\ y_B(x)=ax_B^2+bx_B+c \\ y_C(x)=ax_C^2+bx_C+c \end{array}\right\}$$

- Sustituyendo en él los tres puntos dados obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 9=a(-1)^2+b(-1)+c \\ 1=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 17=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9=-a-b+c \\ 1=a+b+c \\ 17=9a+3b+c \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b,c)=(4,-8,5)$$

- Así que el polinomio interpolador buscado es: $y(x)=4x^2-8x+5$
- Por otro lado, necesitamos calcular el valor de y cuando x=0 y x=2. Para ello usamos el polinomio interpolador que acabamos de hallar:

$y(0)=4\cdot 0^2-8\cdot 0+5=5$; $y(2)=4\cdot 2^2-8\cdot 2+5=5$

4. Sea la función $f(x)=x^2$, y sea $P(x)$ el polinomio interpolador que coincide con la función $f(x)$ en las coordenadas x=2 y x=5. Halla la expresión de $P(x)$.

Solución:

- $P(x)$ lo vamos a construir usando dos puntos, que los vamos a llamar A y B. De esos dos puntos en principio sólo conocemos las coordenadas pertenecientes a *x*. Las coordenadas de *y* las obtenemos sustituyendo x=2 y x=5 en $f(x)$:

$f(2)=4$; $f(5)=25$, por lo que los puntos son: $A(2,4)$ y $B(5,25)$.

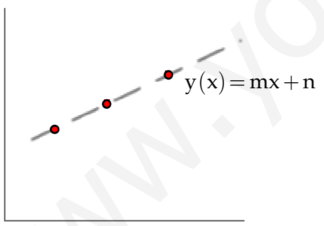
- El polinomio interpolador que pasa por estos dos puntos viene dado por: $y(x)-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_B)$. Sustituyendo datos en él:

$$y(x)-25=\frac{25-4}{5-2}(x-5)\Rightarrow y(x)=7(x-5)+25\Rightarrow y(x)=7x-10$$

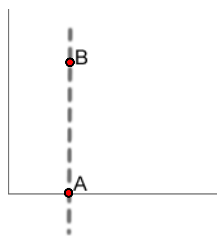
5. Responde adecuadamente a cada una de las siguientes cuestiones
   a) ¿Puede ocurrir que cuando calculamos un polinomio interpolador que pasa por tres puntos, obtengamos la ecuación de una recta? ¿Por qué? Pon un ejemplo.
   b) ¿Ser puede calcular el polinomio interpolador que pasa por los puntos A(2,0) y B(2,5)? ¿Por qué?
   c) Pon un ejemplo de de cuatro puntos tales que al tratar de obtener un polinomio interpolador éste sea de segundo grado.

Solución:

a) Si. Ello ocurre cuando los tres puntos pertenecen a una misma línea recta, como se muestra en la figura.



b) El polinomio interpolador que pasa por A y B se obtendría sustituyendo las coordenadas de cada punto en la expresión $y(x)-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_B)$. Pero al hacerlo obtendríamos que $y(x)=\frac{5}{0}(x-2)$, es decir, $y(x)=\infty(x-2)$. Por ello, no es posible calcular el polinomio interpolador.



c) Los cuatro puntos han de ser tales que estén contenidos en una curva parabólica