

FUNCIONES DEFINIDAS POR TABLAS. INTERPOLACIÓN

Muchas veces de dos variables que están relacionadas no conocemos mas que los valores que la experiencia nos dice que toman. No conocemos la relación exacta entre ambas (no conocemos la función $f(x)$ a partir de la cual una depende de la otra), pero nos gustaría saber cómo se comportaron esas variables en valores de los que no tenemos datos o, al menos, una estimación cercana a dichos valores desconocidos.

Ese problema lo resuelve la interpolación. Al interpolar realizamos estimaciones o predicciones que, sin ser certeras al 100%, si son muy cercanas al valor real que tomaron las variables estudiadas.

El método seguido para ello es suponer que la función se comporta como una función de un cierto tipo (puede ser lineal o cuadrática) para poder hallar la expresión general de esa función a partir de los datos que poseemos. Una vez tenemos esa expresión se realizan las estimaciones sin mas que sustituir.

A continuación explicamos con detalle la interpolación lineal y la interpolación cuadrática.

Interpolación lineal

Para poder realizarla hemos de tener dos datos entre los cuales queramos interpolar (x_0, y_0) (x_1, y_1) .

Consideramos que la función a la cual pertenecen los datos es lineal; es decir, sigue una ecuación $y = mx + n$

El problema, claro está, es que no conocemos los valores de m y n .

Como el punto (x_0, y_0) pertenece a la función $\Rightarrow y_0 = mx_0 + n$

Como el punto (x_1, y_1) pertenece a la función $\Rightarrow y_1 = mx_1 + n$.

Tenemos por tanto el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = mx_0 + n \\ y_1 = mx_1 + n \end{array} \right\}$$

De donde podemos obtener los valores de m y n .

Por lo tanto ya podremos interpolar a partir de esta función para los valores de x que deseemos podemos realizar predicciones sobre el valor de y (o viceversa)

Ejemplo

La facturación, en millones de euros, de una empresa productora de coches en España viene dada por la tabla:

Años(x)	2003	2005	2008
Facturación	4050	4420	4920

- a) Estimar, mediante interpolación lineal los datos de facturación de esta empresa en los años 2004, 2007.
- b) Estimar, mediante extrapolación, la facturación correspondiente al año 2009.
- c) ¿En qué año cabe esperar que la facturación ascienda a 5420 millones de euros?

Solución

Como se pide estimar la facturación por interpolación lineal, para cada cálculo se deben considerar únicamente dos datos, que han de ser los más próximos al valor que se desea definir que aparezcan en la tabla.

En primer lugar, para simplificar los cálculos, vamos a considerar al año 2003 como el año 0; por tanto la tabla con la definitivamente trabajaremos será:

Años(x)	0	2	5
Facturación	4050	4420	4920

a) Año 2004

Con la nueva tabla queremos interpolar para el año 1; por tanto consideraremos:

$$(x_0, y_0) = (0, 4050)$$

$$(x_1, y_1) = (2, 4420)$$

Con lo que se verifica:

$$\left. \begin{aligned} 4050 &= 0 \cdot m + n \\ 4420 &= 2m + n \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $n = 4050$ $m = 185$

Por tanto la función de interpolación es:

$$y = 185x + 4050$$

Sin más que sustituir x por 1 llegamos a que $y = 4235$. Es decir, la facturación de 2004, se estima que fue 4235 millones de euros.

Año 2007

Ahora queremos interpolar para el año 4. Por tanto:

$$(x_0, y_0) = (2, 4420)$$

$$(x_1, y_1) = (5, 4920)$$

Tenemos entonces:

$$\left. \begin{aligned} 4420 &= 2m + n \\ 4920 &= 5m + n \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo llegamos a $n = 4086,67$ $m = 166,67$

La función de interpolación buscada es $y = 166,67x + 4086,67$

Sustituyendo x por 4 llegamos a que $y = 4753,33$ millones de euros.

b) Año 2009

Se extrapola (ahora el valor deseado de x no está entre dos valores conocidos, sino a continuación del último). Lo que se hace es, de nuevo, considerar los datos más próximos al año 2009. Por tanto se tiene la misma función de interpolación que antes: $y = 166,67x + 4086,67$.

Como queremos estimar para el año 2009, simplemente hemos de considerar $x=6$ en la función y se concluye que $y = 5086,67$ millones de euros.

c) ¿Cuándo la facturación será de 5420 millones de euros?

A la vista de los datos, eso debe suceder pasado 2008. Por eso considero como función de interpolación la misma de los dos últimos apartados:

$$y = 166,67x + 4086,67$$

Yo quiero hallar el valor de x para el cual se alcanza $y = 5420$

$$5420 = 166,67x + 4086,67$$

Por tanto $x = 8$. Esto quiere decir que se alcanzará esa cota en el año 2011.

Interpolación cuadrática

El método es similar al anterior; pero ahora consideramos que la función buscada es un polinomio de segundo grado. Las estimaciones obtenidas con este tipo de interpolación serán mejores que las de la interpolación lineal. Para poderla hacer será necesario tener, al menos, tres puntos de la función:

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

La función será de la forma $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$ y recibe el nombre de polinomio interpolador.

Como (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) verifican la ecuación obtenemos:

$$y_0 = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) \Rightarrow y_0 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \Rightarrow y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Por tanto obtenemos el sistema, fácil de resolver:

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = a_0 \\ y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{array} \right\}$$

Al obtener los valores de a_0, a_1, a_2 ya simplemente habré de sustituir el valor a interpolar en el polinomio interpolador y así hallaré la estimación buscada.

Ejemplo

Resolvamos el mismo ejemplo de antes, pero ahora por interpolación cuadrática.

Teníamos la tabla

Años(x)	0	2	5
Facturación	4050	4420	4920

a) Año 2004

Queremos interpolar para el año 1; por tanto, al necesitar tres datos, consideraremos:

$$(x_0, y_0) = (0, 4050)$$

$$(x_1, y_1) = (2, 4420)$$

$$(x_2, y_2) = (5, 4920)$$

Con lo que se verifica:

$$4050 = a_0 + a_1(0 - 0) + a_2(0 - 0)(0 - 2)$$

$$4420 = a_0 + a_1(2 - 0) + a_2(2 - 0)(2 - 2)$$

$$4920 = a_0 + a_1(5 - 0) + a_2(5 - 0)(5 - 2)$$

Tenemos pues el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 4050 &= a_0 \\ 4420 &= a_0 + 2a_1 \\ 4920 &= a_0 + 2a_1 + 15a_2 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $a_0 = 4050$ $a_1 = 185$ $a_2 = -3,67$

Por tanto el polinomio interpolador es:

$$P(x) = 4050 + 185x - 3,67x(x - 2)$$

Sin mas que sustituir x por 1 llegamos a que $P(x) = 4238,67$. Es decir, la facturación de 2004, se estima que fue 4238,67 millones de euros.

Año 2007

Tenemos el polinomio interpolador (que no cambiará en todo el ejercicio).

$$P(x) = 4050 + 185x - 3,67x(x - 2)$$

Sustituyendo x por 4 llegamos a que $P(x) = 4760,67$ millones de euros.

b) Año 2009

Se extrapola (ahora el valor deseado de x no está entre dos valores conocidos, sino a continuación del último). Utilizando el polinomio interpolador, al querer estimar para el año 2009, consideramos $x = 6$ en la función y se concluye que $P(x) = 5072$ millones de euros.

c) ¿Cuándo la facturación será de 5420 millones de euros?

$$P(x) = 4050 + 185x - 3,67x(x - 2)$$

Yo quiero hallar el valor de x para el cual se alcanza $P(x) = 5420$

$$5420 = 4050 + 185x - 3,67x(x - 2)$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que $x = 8,5$.

Es decir, a mitad de 2011 se alcanzaría esa facturación.