VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS Y CONTINUAS

Una función que a cada uno de los sucesos del espacio muestral le hace corresponder un número real se llama **variable aleatoria**, y el conjunto de todos los posibles valores obtenidos se llama **recorrido de la variable**.

En el ejemplo del número de caras obtenidas al tirar una moneda al aire, la variable aleatoria toma valores de forma que entre cualesquiera dos de ellos, no siempre existen otros valores de la variable. Por eso se dice que la variable es **discreta**.

Existen otras variables aleatorias que pueden tomar cualquier valor de los comprendidos en un determinado intervalo de números reales, como, por ejemplo, el tiempo que tarda el autobús en llegar a una parada o la talla de una persona elegida al azar. Estas variables se llaman **variables aleatorias continuas** y en sus gráficas se representa la probabilidad mediante el área, como veremos más adelante.

DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA DISCRETA

Una variable aleatoria es discreta cuando sólo puede tomar un número finito de valores.

17º.- *(ejemplo pág. 330)*:
Se lanzan dos dados 100 veces, se suman los puntos que se obtienen:

Suma de puntos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias	3	6	8	11	14	17	13	10	9	7	2

La media aritmética es:

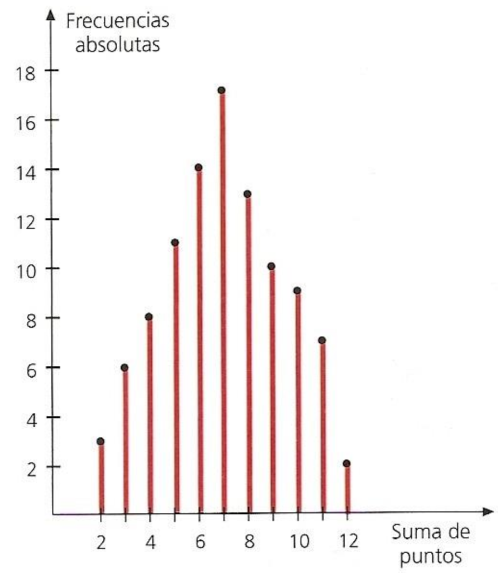
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{699}{100} = 6{,}99$$

La desviación típica es:

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{5483}{100} - 6{,}99^2} = 2{,}44$$

En el intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (4{,}55; 9{,}43)$ está el 65 % de los datos.

En el intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (2{,}11; 11{,}87)$ está el 95 % de los datos.

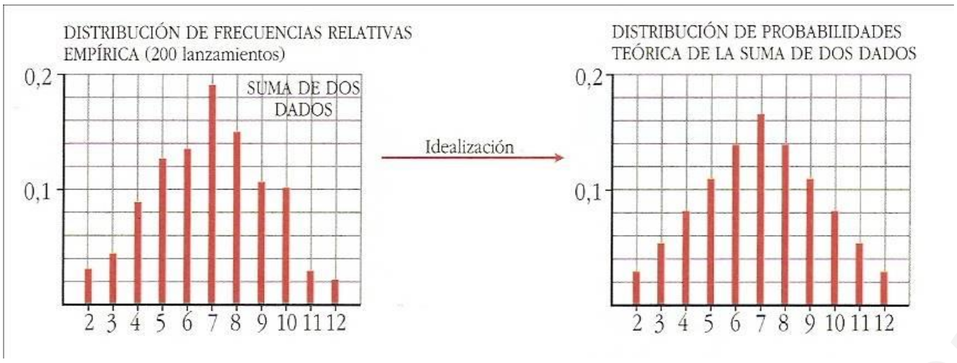


DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

Una distribución de probabilidad es una modelización de la correspondiente distribución estadística de frecuencias. Es decir, una **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta es la tabla en la que aparecen los diferentes valores de la variable aleatoria discreta con sus correspondientes probabilidades.

La ley que asocia a cada valor de la variable su correspondiente probabilidad se llama **función de probabilidad**.

Para que una distribución de probabilidad esté correctamente definida, las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral deben ser números no negativos y su suma debe ser 1.



Ejemplo: "Número obtenido" al lanzar un dado:

xi	1	2	3	4	5	6
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ejemplo: "Suma de los resultados" al lanzar dos dados:

xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pi	1/36	2/36	3/3	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

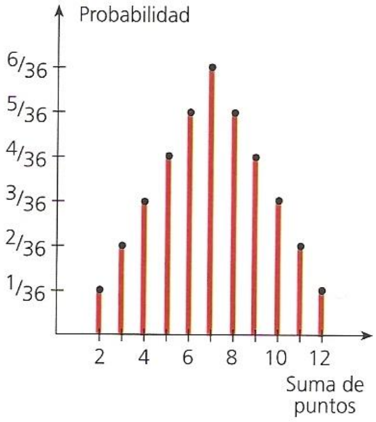
Ejemplo: "Número de caras" al lanzar dos monedas:

xi	0	1	2
Pi	1/4	2/4	$\frac{1}{4}$

EJERCICIOS

18°.- *(ejemplo pág. 331)*:
En el ejemplo anterior (se lanzan dos dados 100 veces, se suman los puntos que se obtienen):

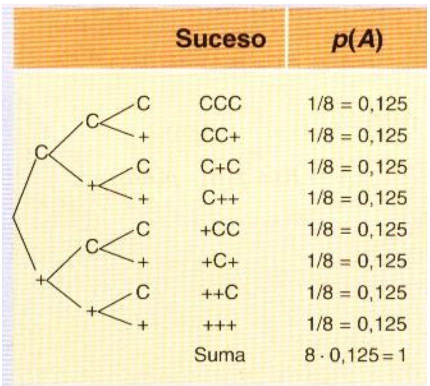
ESPACIO MUESTRAL E	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (6,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
Suma de puntos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



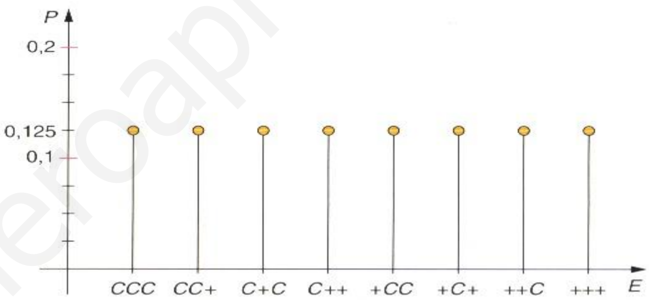
19º.- Se lanza al aire una moneda tres veces. Dibuja el árbol de probabilidades y representa gráficamente la distribución de probabilidades.

Solución:

Si la moneda no está trucada, la probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es la misma que la de obtener cruz, y vale $\frac{1}{2}$. Se tiene:

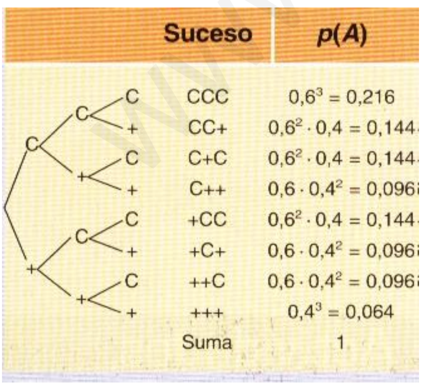


Suceso	$p(A)$
CCC	1/8 = 0,125
CC+	1/8 = 0,125
C+C	1/8 = 0,125
C++	1/8 = 0,125
+CC	1/8 = 0,125
+C+	1/8 = 0,125
++C	1/8 = 0,125
+++	1/8 = 0,125
Suma	$8 \cdot 0,125 = 1$

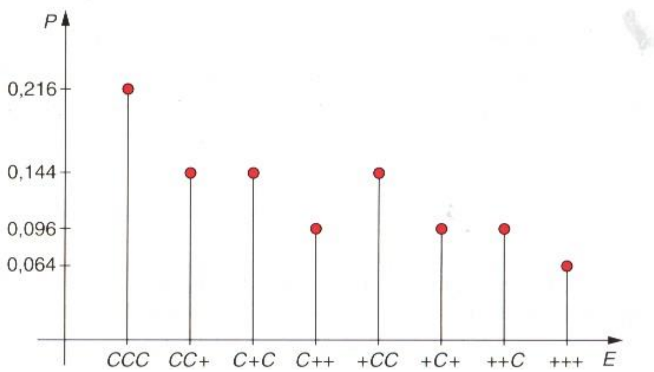


20º.- Lanzamos al aire una moneda tres veces. Supongamos que la moneda está trucada, de modo que la probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es 0,6, mientras que la de obtener cruz es 0,4. Dibuja el árbol de probabilidades y representa gráficamente la distribución de probabilidades.

Solución: Se tiene:



Suceso	$p(A)$
CCC	$0,6^3 = 0,216$
CC+	$0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$
C+C	$0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$
C++	$0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096$
+CC	$0,6^2 \cdot 0,4 = 0,144$
+C+	$0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096$
++C	$0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096$
+++	$0,4^3 = 0,064$
Suma	1



21º.- En el lanzamiento de dos dados consideramos la variable aleatoria que asocia a cada resultado el mayor de los números obtenidos. Halla y representa la función de probabilidad asociada a dicha variable aleatoria.

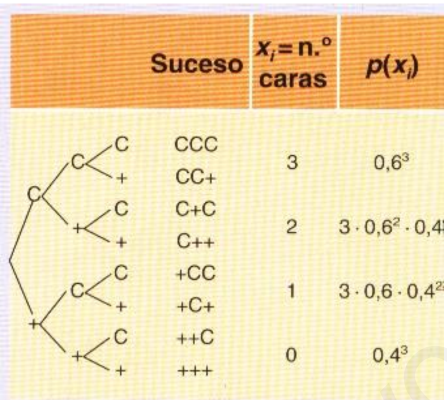
Solución:

X	1	2	3	4	5	6
Pi	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

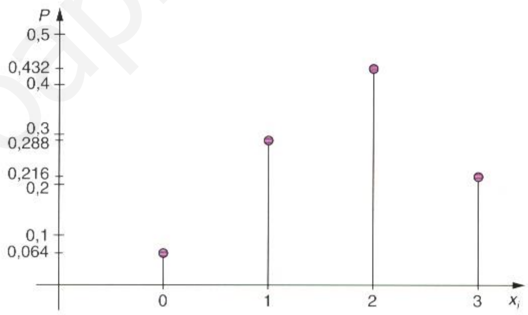
22°.- Describe la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria "número de caras" en el lanzamiento de cuatro monedas.
Solución:

nº de caras	4	3	2	1	0
probabilidad	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

23°.- Se lanza al aire una moneda tres veces. Se considera el experimento: x_i = " nº de caras obtenidas al lanzar tres veces al aire una moneda". Supongamos que la moneda está trucada, de modo que la probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es 0,6. Representa la distribución de probabilidad de esta variable.
Solución:
El recorrido de la variable es $R = \{0,1,2,3\}$. Considerando el caso en que la moneda esté trucada con p(C)=0,6, la distribución de probabilidad para esta variable aleatoria es:



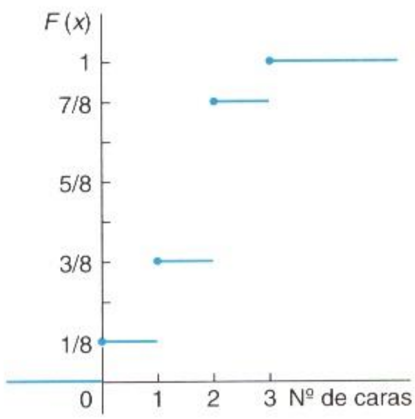
Suceso	x_i = n.° caras	$p(x_i)$
CCC	3	$0{,}6^3$
CC+		
C+C	2	$3\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4$
C++		
+CC	1	$3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^2$
+C+		
++C	0	$0{,}4^3$
+++		



24°.- Halla la función de distribución correspondiente a la variable aleatoria "nº de caras" en el lanzamiento de tres monedas, y represéntala gráficamente.

Solución:

x	F(x)
x < 0	0
0 ≤ x < 1	1/8
1 ≤ x < 2	4/8
2 ≤ x < 3	7/8
3 ≤ x	1



PARÁMETROS DE UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Como las distribuciones de probabilidad son idealizaciones de las distribuciones estadísticas. La probabilidad es una idealización de la frecuencia relativa $p_i = \frac{f_i}{N}$, por lo que los parámetros se expresan en función de ellas.

♦ MEDIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

La media de una variable aleatoria representa el valor central que tomaría la variable si toda la distribución correspondiese a un único valor de la misma. Se llama también **valor esperado** o **esperanza matemática** y se representa con la letra griega μ.

La media de una variable discreta es la suma de todos los productos obtenidos multiplicando cada valor de la variable por su correspondiente probabilidad:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{N} \Rightarrow \mu = \sum p_i \cdot f_i$$

El valor de la media es el parámetro utilizado para medir si un juego es **equitativo o no**: una esperanza igual a cero indica que no hay ventaja para ningún apostante.

♦ VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

Para medir la dispersión de los valores de la variable respecto de la media, se pueden utilizar las desviaciones de cada valor respecto de ella y hallar su valor medio, pero como la suma de las desviaciones positivas coincide con la de las negativas, esto daría siempre cero y, por tanto, no sirve para medir la dispersión.
Para prescindir de los signos tenemos dos métodos: utilizar valores absolutos o sumar los cuadrados (que siempre son positivos), hallando posteriormente la raíz cuadrada.
Llamamos varianza al parámetro que se obtiene al hacer la media de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media:

$$\sigma^2 = \Sigma p_i \cdot (x_i - \mu)^2 = \sum \mathrm{p_i} \cdot x_i^{\ 2} - \mu^2$$

Llamamos desviación típica a la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i \cdot x_i^{\ 2} - \mu^2}$$

Ejemplo 25º: *(ejercicio resuelto 3 pág. 332):*
En una caja hay bombillas, unas lucen, son buenas, y otras no lucen, son defectuosas, con igual probabilidad ambas. Elegimos dos bombillas. Tomamos como variable aleatoria "número de bombillas defectuosas".

A) Encuentra el espacio muestral y estudia si la variable aleatoria es o no discreta.
B) Construye la distribución de probabilidad y comprueba que $\sum p_i = 1$.

Solución: A) E={BB, BD, DB, DD}; la variable aleatoria toma los valores 0, 1, 2, por lo que es discreta.

B)

X	0	1	2
Pi	1/4	2/4	1/4

$$\Sigma p_i = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Ejemplo 26º: *(ejercicio resuelto 4 pág. 333):*
Lanzamos dardos a una diana circular con tres círculos concéntrico y cada uno con un número del 1 al 6 y obtenemos la siguiente distribución de probabilidad:

X	1	2	3	4	5	6
Pi	0,32	0,28	a	0,12	0,06	0,01

A) Halla el valor de a para que se trate de una distribución de probabilidad.
B) Calcula: $p(x \geq 4), p(x < 3), y, p(2 < x < 4)$

Solución: A) $p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) = 1$
Por tanto: 0,32 + 0,28 + a + 0,12 + 0,06 + 0,01 = 1, es decir: a = 0,21.
B) $p(x \geq 4) = p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) = 0{,}12 + 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}19$
$p(x < 3) = p(x=1) + p(x=2) = 0{,}32 + 0{,}28 = 0{,}6$
$p(2 < x < 4) = p(x=3) = 0{,}21$

Ejemplo 27º: *(ejercicio resuelto 5 pág. 333):*
Lanzamos tres monedas al aire. Definimos la variable aleatoria "número de caras obtenidas".
A) Encuentra el espacio muestral.
B) ¿Qué valores toma esta variable aleatoria?
C) Construye la distribución de probabilidad.
D) Calcula la media y la desviación típica de esta variable aleatoria.

Solución: A) E={CCC,CCX,CXC,XCC,CXX,XCX,XXC,XXX}
B) La variable aleatoria toma los valores 0, 1, 2 y 3, por lo que es discreta.
C)

X	0	1	2	3
Pi	1/8	3/8	3/8	1/8

D) $\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1{,}5^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}87$$

Ejemplo 28º: En una bolsa hay 20 bolas numeradas: 9 con un "1", 5 con un "2" y 6 con un "3". Se extrae una bola al azar. Construye la distribución de probabilidades y halla sus parámetros μ y σ.

Solución:

$$p(1) = \frac{9}{20} = 0{,}45;\ p(2) = \frac{5}{20} = 0{,}25;\ p(3) = \frac{6}{20} = 0{,}30$$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	0,45	0,45	0,45
2	0,25	0,50	1,00
3	0,30	0,90	2,70
Σ	1	1,85	4,15

$$\mu = \sum p_i \cdot f_i = 1{,}85;\ \sigma^2 = \sum p_i \cdot x_i^2 - \mu^2 = 4{,}15 - 1{,}85^2 = 0{,}7275;\ \sigma = \sqrt{0{,}7275} = 0{,}85$$

Ejemplo 29º: Halla μ y σ en la distribución que se obtiene al sumar las puntuaciones de dos dados.

Solución:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
2	1/36	2/36	4/36
3	2/36	6/36	18/36
4	3/36	12/36	48/36
5	4/36	20/36	100/36
6	5/36	30/36	180/36
7	6/36	42/36	294/36
8	5/36	40/36	320/36
9	4/36	36/36	324/36
10	3/36	30/36	300/36
11	2/36	22/36	242/36
12	1/36	12/36	144/36
Σ		252/36	1974/36

$$\mu = \frac{252}{36} = 7;\ \sigma = \sqrt{\frac{1974}{36} - 7^2} = 2{,}415$$

EJERCICIOS

30º.- Un amigo propone el siguiente juego: "Lanzamos un dado. Si sale múltiplo de tres, yo te doy 6 €, y, en caso contrario, tu me das 4 €". ¿Se debería aceptar el juego? ¿En qué condiciones se debería aceptar?

Solución:

Variable aleatoria: x_i = "premio obtenido en el juego". Su distribución de probabilidad se puede ver en la siguiente tabla:

Suceso	x_i	$P(x_i)$
No múltiplo de 3 (1, 2, 4, 5)	−4	2/3
Múltiplo de 3 (3, 6)	+6	1/3

Para averiguar si el juego es equitativo se calcula la esperanza matemática de la variable:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
-4	2/3	-8/3	16	32/3
6	1/3	6/3	36	36/3
Σ	1	-2/3	52	68/3

$$\mu = -\frac{2}{3};\ \sigma^2 = \frac{68}{3} - \frac{4}{9} = \frac{200}{9};\ \sigma = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

$\mu = -4 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = -0{,}67$ €. No se debería aceptar el juego propuesto, ya que resulta ventajoso para el amigo que lo propone.

Si cada vez que saliera un múltiplo de tres, él diera 8 €, entonces el juego sería equitativo:

$$\mu = -4 \cdot \frac{2}{3} + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

31°.- Halla la media o valor esperado de la variable aleatoria x, cuya función de probabilidad es:

X	1	2	3	4	5	6
Pi=P(X=xi)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Solución: $\mu = 4{,}47$

32°.- Un jugador lanza tres monedas. Recibe 1000 euros, si salen tres caras; 250 euros, si salen dos caras; y nada, si sale cualquier otra combinación. ¿Cuál debería ser el precio de la apuesta para que el juego fuese equitativo o justo?

Solución:

x_i	1000	250	0
p_i	1/8	3/8	4/8

$$\mu = \frac{1750}{8} = 218{,}75€$$

33°.- En un sorteo pueden tocar seis premios de 600, 60 y 6 € con probabilidades de 0,0001; 0,0005 y 0,002, respectivamente.

Considerando la variable x_i = "premio conseguido", halla μ y σ. Se debe tener en cuenta que la suma total de las probabilidades de los valores de la variable debe ser 1.

Solución:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
600	0,0001	0,0384	360000	13824
60	0,0005	0,1923	3600	692,28
6	0,002	0,7692	36	27,69
Σ				14543,97

$$\mu = 39{,}23;\ \sigma = \sqrt{14543{,}97 - 39{,}23^2} = 114{,}03$$

34°.- En la siguiente distribución de probabilidad, calcula el valor de k, la media de la variable y su desviación típica:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,25	0,2	k	0,15	0,15

Solución: $0{,}25 + 0{,}2 + k + 0{,}15 + 0{,}15 = 1 \Rightarrow k = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
1	0,25	0,25	1	0,24
2	0,2	0,4	4	0,8
3	k = 0,25	0,75	9	2,25
4	0,15	0,6	16	2,4
5	0,15	0,75	25	3,75
Σ				9,44

$$\mu = 0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}75 + 0{,}6 + 0{,}75 = 2{,}75;\ \sigma = \sqrt{9{,}44 - 7{,}5625} = 1{,}3702$$

35º.- Calcula la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X, cuya función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

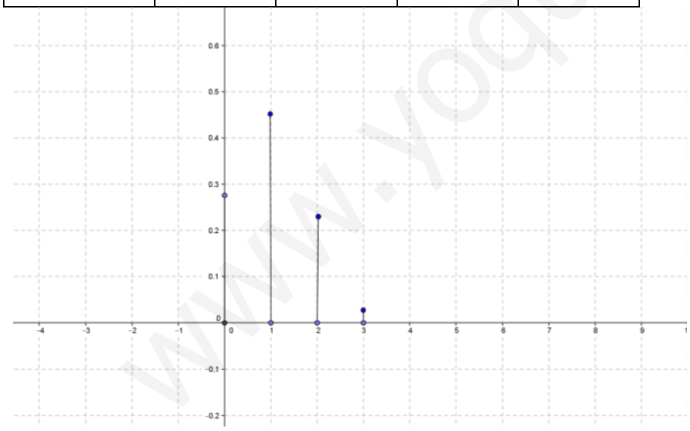
Solución: $\mu = 4{,}47;\ \sigma = \sqrt{1{,}99} = 1{,}41$

36º.- En el lanzamiento de tres dados consideramos la variable aleatoria consistente en anotar el número de múltiplos de tres que aparecen.

a) Halla su función de probabilidad y represéntala.
b) Determina su función de distribución y represéntala.
c) Halla la media y la desviación típica.

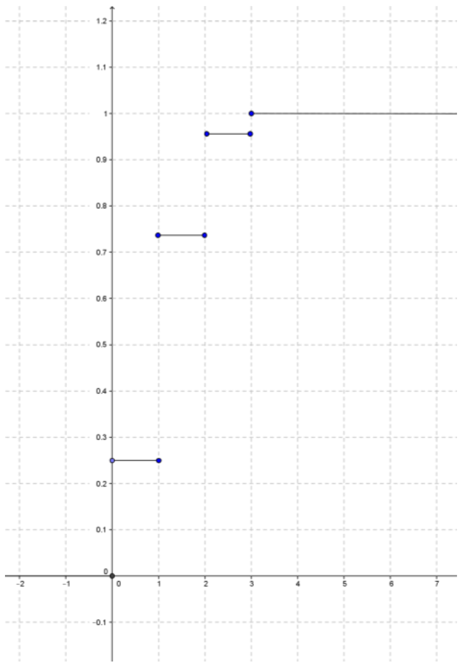
Solución: a)

x_i	0	1	2	3
p_i	64/216	96/216	48/216	8/216



B)

x	F(x)
x < 0	0
0 ≤ x < 1	64/216=0,2963
1 ≤ x < 2	160/216=0,7407
2 ≤ x < 3	208/216=0,9630
3 ≤ x	216/216=1



C)

$$\mu = 0\cdot\frac{64}{216} + 1\cdot\frac{96}{216} + 2\cdot\frac{48}{216} + 3\cdot\frac{8}{216} = 1$$

$$\sigma = \sqrt{0^2\cdot\frac{64}{216} + 1^2\cdot\frac{96}{216} + 2^2\cdot\frac{48}{216} + 3^2\cdot\frac{8}{216} - 1^2} = \sqrt{0,6667} = 0,8165$$

37º.- Determina el valor de k en las siguientes distribuciones de probabilidad:

a)

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	3k	k	0,3

b)

x_i	0	2	3	4	5
p_i	k	3k	2k	3k	k

En ambos casos, halla las funciones de distribución y los parámetros μ y σ.

Solución: a) $0,3 + 3k + 1k + 0,3 = 1 \Rightarrow k = 0,1$

x_i	x<1	$1 \le x < 2$	$2 \le x < 3$	$3 \le x < 4$	$4 \le x$
F(x)	0	0,3	0,6	0,7	1

$$\mu = 1\cdot0,3 + 2\cdot0,3 + 3\cdot0,1 + 4\cdot0,3 = 2,4$$

$$\sigma = \sqrt{1^2\cdot0,3 + 2^2\cdot0,3 + 3^2\cdot0,1 + 4^2\cdot0,3 - 2,4^2} = 1,2$$

b) $k + 3k + 2k + 3k + k = 1 \Rightarrow k = 1/10$

x_i	0	2	3	4	5
p_i	1/10	3/10	2/10	3/10	1/10

x_i	x<0	$0 \le x < 2$	$2 \le x < 3$	$3 \le x < 4$	$4 \le x < 5$	$5 \le x$
F(x)	0	1/10	4/10	6/10	9/10	1

$$\mu = 0\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{2}{10} + 4\cdot\frac{3}{10} + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{29}{10} = 2{,}9;\ \sigma = \sqrt{1{,}89} = 1{,}375$$

38°.- Lanzamos una moneda cuatro veces. Sea X el número de caras consecutivas. Halla la función de probabilidad, la media y la desviación típica.

<u>Solución:</u>

x_i	0	1	2	3
p_i	8/16	5/16	2/16	1/16

$$\mu = 0\cdot\frac{8}{16} + 1\cdot\frac{5}{16} + 2\cdot\frac{2}{16} + 3\cdot\frac{1}{16} = \frac{12}{16} = 0{,}75;\ \sigma = \sqrt{1{,}8819} = 1{,}372$$

39°.- Dos bolas son tomadas de una urna que contiene cinco bolas numeradas con 1, 1, 2, 2 y 3. Sea X la suma de números e Y el mayor de los números obtenidos. Halla la función de probabilidad, la media y la desviación típica de:

a) X b) Y; c) X+Y; d) XY

<u>Solución:</u>

A)

x_i	2	3	4	5
p_i	2/20	8/20	6/20	4/20

$$\mu = 2\cdot\frac{2}{20} + 3\cdot\frac{8}{20} + 4\cdot\frac{6}{20} + 5\cdot\frac{4}{20} = 3{,}6;\ \sigma = 2{,}42$$

B)

x_i	1	2	3
p_i	2/20	10/20	8/20

$$\mu = 1\cdot\frac{2}{20} + 2\cdot\frac{10}{20} + 3\cdot\frac{8}{20} = 2{,}2;\ \sigma = 0{,}93$$

C) Z1 = X + Y

z_1	3	4	5	6	7	8
p_i	4/400	36/400	108/400	132/400	88/400	32/400

$$\mu = 5{,}9;\ \sigma = 1{,}12$$

C) Z2 = X · Y

z_2	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15
p_i	4/400	16/400	32/400	8/400	96/400	60/400	64/400	40/400	48/400	32/400

$$\mu = 8{,}28;\ \sigma = 3{,}178$$

40º.- Un jugador lanza tres monedas. Gana 500 €, si salen tres caras; 250 €, si salen dos caras; y 100 € si sale una cara. Si el juego es equitativo, ¿cuánto deberá perder cuando no sale ninguna cara?

Solución:

x_i	500	250	100	x
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Equitativo: $\mu = 0 \Rightarrow 500\cdot\frac{1}{8} + 250\cdot\frac{3}{8} + 100\cdot\frac{3}{8} + x\cdot\frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x = -1450€$

41º.- Un jugador lanza un dado y cobra tantos euros como indica el número obtenido. ¿Cuánto debe pagar por jugada para que el juego sea equitativo?

Solución:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$\mu = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$. Pagar 3,5 € por jugada

42º.- Un jugador lanza dos dados, y cobra tantos billetes de 5 € como veces aparezca el cinco. Describe este juego mediante una variable aleatoria. ¿Es rentable participar en este juego, si para ello, hay que pagar 3 € por tirada?

Solución:

x_i	0	1	2
p_i	25/36	10/36	1/36

$\mu = 0{,}33€$; El valor del juego es 1,67 €. No resulta rentable si paga 3 € por tirada.

43º.- En una urna hay 20 bolas marcadas: diez lo están con el 1, cinco con el 5, cuatro con el 10 y una con el 125. El juego consiste en extraer una bola al azar, obteniéndose como premio tantos euros como indica el número que la bola lleva marcado, X.

a) Escribe la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.
b) Calcula la ganancia media μ.
c) Si para poder participar tienes que pagar 15 euros por jugada, ¿interesa hacerlo?

Solución: A)

x_i	1	5	10	125
p_i	10/20	5/20	4/20	1/20

B) $\mu = 10$;   C) No interesa a 15 €/jugada, porque se pierden 5 E/juagada de media.

44º.- Un jugador lanza un dado. Si sale un número primo, gana este número de euros, pero, si sale un número que no es primo, pierde este número de euros. ¿Es favorable este juego para el jugador?

Solución:

x_i	-6	-4	-1	2	3	5
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$\mu = -1/6$;   Juego desfavorable para el jugador.

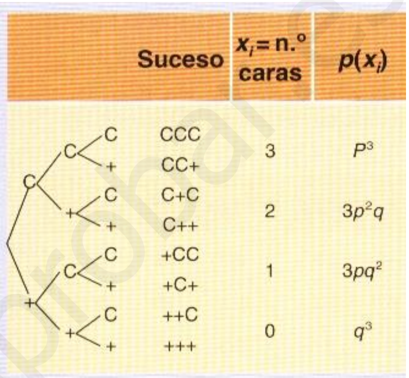
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La variable aleatoria x_i = "nº de veces que ocurre el éxito A cuando se realiza el experimento n veces" sigue una **distribución de probabilidad binomial** de parámetros 'n' y 'p', y se representa por **B(n,p)**, cuando:

- el experimento se repite un número determinado n de veces idénticas.
- cada vez que se realiza se pueden considerar sólo dos posibles resultados, A = éxito y $\overline{A}$ = fracaso.
- La probabilidad de estos dos sucesos es la misma cada vez que se realiza el experimento: p(A)=p; $p(\overline{A})=q$; con p + q = 1. Es decir, los experimentos son independientes.

Consideremos el lanzamiento tres veces consecutivas de una moneda trucada. Generalizando a una moneda en la cual la probabilidad de obtener cara es p(C)=p y la de obtener cruz es P(X)=q, es evidente que p + q = 1. La suma de todas las probabilidades de la distribución es:

$$p(3)+p(2)+p(1)+p(0)=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=$$
$$=(p+q)^3=1^3=1$$



Suceso	x_i= n.º caras	$p(x_i)$
CCC CC+	3	p^3
C+C C++	2	$3p^2q$
+CC +C+	1	$3pq^2$
++C +++	0	q^3

Tenemos que la probabilidad de que la variable x_i = "nº de caras en tres lanzamientos" tome cada uno de sus valores, viene descrita por cada uno de los términos del desarrollo de la potencia del binomio $(p+q)^3$.

Se puede demostrar que, si en lugar de tres lanzamientos, se realizan n, las probabilidades se comportan de la misma forma. Entonces cada uno de los términos del desarrollo de la potencia del binomio $(p+q)^n$ representa la probabilidad de que la variable x_i = "nº de caras en 'n' lanzamientos" tome el valor correspondiente al exponente del término p.

NOTA: Recordamos que el desarrollo de la potencia de $(p+q)^n$ viene dado por el **binomio de Newton**:

$$(p+q)^n=\binom{n}{n}p^n+\binom{n}{n-1}p^{n-1}q+\binom{n}{n-2}p^{n-2}q^2+\ldots+\binom{n}{k}p^kq^{n-k}+\ldots+\binom{n}{0}q^n$$

NOTA: El número combinatorio $\binom{n}{k}$ representa el número de grupos distintos de k elementos que se pueden formar eligiéndolos de entre n elementos. Se calcula aplicando la expresión: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

(También se pueden calcular los números combinatorios leyéndolos de las filas correspondientes del triángulo de Tartaglia).

Entonces resulta que la probabilidad de que la variable x_i tome el valor k viene dada por la expresión:

$p(x_i=k)=p(k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, con k = 0, 1, 2, …, n.

Esta es la **función de probabilidad de la distribución binomial**.

Nº de éxitos: r	0	1	2	…	n-1	n
p_i	$\binom{n}{0}q^n$	$\binom{n}{1}p\cdot q^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2\cdot q^{n-2}$		$\binom{n}{n-1}p^{n-1}\cdot q$	$\binom{n}{n}p^n$

Es decir, la posibilidad de obtener k éxitos será: $p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

45º.- (ejercicio resuelto 6 pág. 334):
Lanzamos un dado 20 veces. Observamos, en cada caso, si la puntuación obtenida es múltiplo de tres. Comprueba si la variable que expresa el número de veces que se ha obtenido un múltiplo de tres sigue la distribución binomial. En caso afirmativo, señala los parámetros de la distribución.
Solución: En cada tirada: A = obtener múltiplo de 3; son 20 lanzamientos: resultados independientes.
p(A) = 2/6 = 1/3 = constante; Los valores posibles de la variable (0, 1, 2, 3, …, 19, 20)
Parámetros de la distribución: n=20; p = 1/3. Por tanto: B(20, 1/3)

Ejemplo 46º: Se tiene una moneda trucada, de modo que la probabilidad de que salga cara en cada lanzamiento es p = 0,3. Halla la probabilidad de que:

a) En cinco lanzamientos se obtengan 3 caras.
b) En 10 lanzamientos se obtengan 6 caras.

Solución:

a) p(3 caras en 5 tiradas) = $\binom{5}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^2 = 10\cdot 0{,}027\cdot 0{,}49 = 0{,}1323$

b) p(6 caras en 10 tiradas) = $\binom{10}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 0{,}7^4 = 210\cdot 7{,}29\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}2401 = 0{,}0368$

Ejemplo 47º: Se toman 10 bombillas de un almacén en el que la probabilidad de que una sea defectuosa es 0,03. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos bombillas defectuosas?
Solución: El número de bombillas defectuosas que hay entre las 10 elegidas es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial B(10; 0,03). Por tanto:

$$p(2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^8 = 0{,}0317$$

Ejemplo 48º: En cierto país, la tasa de paro de la población activa es del 18 %. Si se toma una muestra de 30 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que en la muestra haya exactamente 4 parados?
Solución: El número de parados en dicha muestra es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial B(30; 0,18). Por tanto:

$$p(4)=\binom{30}{4}\cdot 0{,}18^4\cdot 0{,}82^{26} = 0{,}1652$$

Ejemplo 49º: Se toman 5 bombillas de una caja de la que se sabe que la probabilidad de que cada bombilla no luzca es de 0,03. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas estén en mal estado?
Solución: El número de bombillas estropeadas que hay entre las 5 elegidas es una variable aleatoria que presenta una distribución binomial B(5; 0,03). Por tanto:

$$p(2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^3 = \binom{5}{2}\cdot 0{,}000821 = 0{,}0082$$

Ejemplo 50°: Se sabe que tres de cada 10 alumnos de un país hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que en una clase de 40 alumnos haya, al menos, 5 alumnos que sepan inglés?
Solución: El número de alumnos en una clase de 40 que saben inglés es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial B(40; 3/10).

$$p(x_i \geq 5) = p(5) + p(6) + \ldots + p(40)$$

Podemos abreviar este cálculo considerando el suceso contrario:

$$p(x_i \geq 5) = 1 - p(x_i \leq 5) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4)] =$$
$$= 1 - \left[6{,}37 \cdot 10^{-7} + 1{,}09 \cdot 10^{-5} + 9{,}12 \cdot 10^{-5} + 4{,}95 \cdot 10^{-4} + 1{,}96 \cdot 10^{-3}\right] = 0{,}9974$$

- **MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

Dada una distribución binomial de la forma: B(n,p), tenemos:

$$\boxed{\mu = n \cdot p} \text{ y } \boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Ejemplo 51° _(ejercicio resuelto 1 pág. 336)_:
Se supone que la probabilidad de nacer niño es del 0,50. Calcula la probabilidad de que en una familia de seis hijos sean:

a) Todos varones.
b) Al menos, dos varones.
c) Tres varones
d) Calcula la media y la desviación típica.

Solución: B(6,1/2); x = nº hijos varones en familias de 6 hijos.

A) todos varones: $p(x = 6) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}015625$

B) al menos dos varones:

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1) = 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \binom{6}{1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - 0{,}109375 = 0{,}890625$$

C) tres varones: $p(x = 3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}3125$

D) $\mu = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}223$

Ejemplo 52°: Calcula la media y la desviación típica de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial con n = 40 y p = 0,3.
Solución: Es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial B(40; 0,3).

$$\mu = 40 \cdot 0{,}3 = 12;\ \sigma = \sqrt{40 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 2{,}8983 \approx 2{,}90$$

***TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJERCICIOS

53º.- Se lanza un mismo dado 12 veces. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente una vez 5 en los 12 lanzamientos.
b) Exactamente 3 veces 5 en los 12 lanzamientos.
c) Al menos una vez 5 en los 12 lanzamientos.
d) Al menos 3 veces 5 en los 12 lanzamientos.

Solución: 12 veces; x = nº de cincos; B(12,1/6)

A) $p(x=1)=\binom{12}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$

B) $p(x=3)=\binom{12}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{9}$

C) al menos un 5: $p(x\geq 1)=1-p(x=0)=1-\binom{12}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{12}$

D) al menos tres cincos: $p(x\geq 3)=1-p(x<3)=1-p(x=0)-p(x=1)-p(x=2)=$

54º.- En el ejercicio anterior, calcula la media y la desviación típica de la variable x_i = "nº de cincos obtenidos en 12 tiradas".

Solución: $\mu=n\cdot p=12\cdot\frac{1}{5}$; $\sigma=\sqrt{12\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}}$

55º.- Según un estudio estadístico realizado entre jóvenes de 15 y 16 años, se observa que el 40 % practica deporte habitualmente. ¿Cuál es la probabilidad de que lo hagan menos de la cuarta parte de una clase de 20 alumnos de esa edad? En una muestra de 500 jóvenes, ¿cuál es el valor de la media y la desviación típica del número de deportistas?

Solución: 40 % deporte; n = 20; p = 40/100 = 0,4; B(20; 0,4)

A) menos de 1/4: $p\left(x<\frac{1}{4}\cdot 20\right)=p(x<5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=$

B) n=500; B(500; 0,4); $\mu=500\cdot 0{,}4=200$; $\sigma=\sqrt{500\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}$

56º.- Una empresa fabrica chips para ordenadores personales. Tras varios controles de calidad, descubre que el 5% de los que fabrica son defectuosos. El último año fabricó 80000. ¿Cuántos debe esperar que resulten defectuosos?

Solución: p (defectuosos) = 0,05; n = 80000; defectuosos: n · p = 80000 · 0,05 = 4000 chips

57º.- Lanzamos un dado cinco veces y observamos el resultado obtenido. Considerando los resultados que son múltiplos de tres, calcula la probabilidad de obtener un múltiplo de tres en cada uno de los cinco lanzamientos.

Solución: B(n = 5; p = 2/6 = 1/3); $p(x=5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}=0{,}0041$ (tabla)

58º.- Un arquero tiene una probabilidad de 5/6 de hacer blanco. Si realiza cuatro disparos, calcula:

a) La probabilidad de hacer dos blancos.
b) La probabilidad de hacer dos o más blancos.

Solución: B(4, 5/6) A) $p(x=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=0{,}1157$

B) $p(x\geq 2)=p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=$

$=0{,}1157+0{,}3858+0{,}4823=0{,}9838$

59º.- En una urna hay 3 bolas blancas y 7 negras. Se extraen, con devolución, 3 bolas y se observa cuántas son de color blanco. Calcula:

a) La función de probabilidad, la media y la desviación típica.
b) P(X≤2).
c) P(X>1).

Solución: n = nº experimentos; r = nº éxitos; p = 3/10

A) x = nº bolas blancas

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

$\mu=0{,}9;\ \sigma=0{,}794$

B) $p(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=0{,}343+0{,}441+0{,}189=0{,}973$

C) $p(x>1)=1-p(x\leq 1)=1-p(x=0)-p(x=1)=1-0{,}343-0{,}441=0{,}216$

60º.- De una baraja de 40 cartas se extraen, con devolución, cuatro cartas y se anota el número de copas que aparecen. Halla la función de probabilidad y la esperanza matemática.

Solución:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

$\mu=1;\ \sigma=0{,}86$

61º.- La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta es:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	a	b	c	0,2

Sabiendo que P(X≤2)=0,7 y P(X≥2)=0,75, halla la esperanza matemática y la desviación típica.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+0{,}3=1 \\ p(x\leq 2)=0{,}7\Rightarrow 0{,}1+a+b=0{,}7 \\ p(x\geq 2)=0{,}75\Rightarrow b+c+0{,}2=0{,}75 \end{array}\right\}\Rightarrow a=0{,}15; b=0{,}45; c=0{,}1$$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

$\mu=2{,}15;\ \sigma=1{,}1948$

62º.- Dada la distribución de la variable aleatoria discreta X, P(X=1)=3/10; P(X=2)=4/10 y P(X=3)=3/10, ¿cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria esté en el intervalo [μ-σ,μ+σ]?

Solución:

x_i	1	2	3
p_i	3/10	4/10	3/10

$\mu = 2;\ \sigma = \sqrt{0,6} = 0,77$

$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [2 - 0,77; 2 + 0,77] = [1,23; 2,77] \Rightarrow p(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = p(1,23 \leq x \leq 2,77) = p(x = 2) = \frac{4}{10}$

63°.- Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente distribución de probabilidad:

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	1/9	1/18	1/9	5/18	1/6	x

a) Completa la distribución de probabilidad.
b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución: A) $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{5}{18} + \frac{1}{6} + x = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{18}$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/9	1/18	1/9	5/18	1/6	5/18

B) $\mu = 4,17;\ \sigma = 1,5986$

64°.- La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51,7 %. Halla la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga:

a) Por lo menos una niña.
b) Por lo menos un niño.

Solución:

A) P (al menos una niña) = 1 – P (ninguna niña) $= 1 - \binom{5}{5} \cdot 0,517^2 = 0,9631$

B) $p(x \geq 1) = 1 - p(x < 1) = 1 - p(x = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,483^5 = 0,9737$

65°.- La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de arquitecto es de 0,3. Calcula la probabilidad de que de un grupo de siete estudiantes matriculados en primer curso:

a) Los siete finalicen la carrera.
b) Al menos dos acaben la carrera.

Solución: B(7; 0,3)

A) $p(x = 7) = \binom{7}{7} \cdot 0,3^7 = 0,000227$

B) $p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - p(x = 0) - p(x = 1) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,7^7 - \binom{7}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^6 =$

$= 1 - 0,0824 - 0,2471 = 0,6706$

66°.- Se tiene una moneda trucada, de modo que la probabilidad de sacar cara es cuatro veces la de sacar cruz. Se lanza seis veces la moneda. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos veces cruz.
b) Obtener, a lo sumo, dos veces cruz.

Solución: B(4; 4/5); p(cara)=4/5; p(x)=1/5

A) $p(x = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,2458$

B) $p(x=6)+p(x=5)+p(x=4)=\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6+\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)+\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^2=$

$=0{,}2621+0{,}3932+0{,}2458=0{,}9011$

67º.- Una moneda está trucada, de forma que la probabilidad de sacar cruz es 7/11. Se lanza la moneda 10 veces. Encuentra:

a) La probabilidad de sacar 8 caras.
b) La probabilidad de sacar, al menos, una cruz.

<u>Solución:</u> B(10; 4/11)

A) $p(x=8)=\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{4}{11}\right)^8\cdot\left(\frac{7}{11}\right)^2=0{,}0056$

B) P (al menos una cara) m= 1 – P (ninguna cara) $=1-\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{4}{11}\right)^{10}=1-0{,}00004=0.99996$

68º.- En un juego se gana cuando, al lanzar dos dados, se obtiene suma de 10 puntos, o más. Un jugador tira en 12 ocasiones los dos dados. Calcula:

a) Probabilidad de que gane exactamente en tres ocasiones.
b) Probabilidad de que pierda las doce veces que juega.

<u>Solución:</u> B(12; 1/6)

A) $p(x=3)=\binom{12}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^9=0{,}1974$

B) $p(x=0)=\binom{12}{0}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{12}=0{,}1122$

69º.- Cierto medicamento contra una enfermedad provoca mejoría en el 60 % de los casos.
A) ¿Cuál es la probabilidad de que, de cinco pacientes que siguen el tratamiento, los cinco mejoren?
B) ¿Y de que cuatro no experimenten mejoría?

<u>Solución:</u> P (éxito) = 0,6; 5 pacientes

A) que los 5 mejoren: $p(x=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}6^5=0{,}0777$

B) que 4 no mejoren: $p(x=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^4=0{,}0768$

70º.- La probabilidad de que un alumno de primero de bachillerato estudie Matemáticas I es de 0,4. Calcula la probabilidad de que en un grupo de 10 alumnos elegidos al azar haya exactamente 7 que no estudien Matemáticas I.

<u>Solución:</u> B(10; 0,4); $p(x=3)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^7=0{,}2150$

71º.- Un arquero tiene una probabilidad de hacer blanco de 4/5. Si tira 3 veces, calcula:

a) La probabilidad de hacer blanco exactamente una vez.
b) La probabilidad de hacer blanco más de una vez.

<u>Solución:</u> B (3; 4/5)

A) $p(x=1)=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=0{,}096$

B) $p(x>1)=p(x=2)+p(x=3)=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=0{,}384+0{,}512=0{,}896$

72°.- Una variable aleatoria X sigue la ley binomial de tipo B(5; 0,3). Determina:

a) Su función de probabilidad.
b) La media y la desviación típica.
c) La función de distribución F(x).

Solución: A)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

B) $\mu=n\cdot p=5\cdot 0{,}3=1{,}5;\ \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7}=1{,}025$

x	F(x)
x < 0	0
0 ≤ x < 1	0,1681
1 ≤ x < 2	0,5283
2 ≤ x < 3	0,8370
3 ≤ x < 4	0,9693
4 ≤ x < 5	0,9977
5 ≤ x	1

73°.- Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 negras. Se saca una bola al azar, se apunta el color, y se devuelve a la urna. Si la experiencia se repite 5 veces, halla:

a) La probabilidad de obtener dos bolas blancas.
b) La probabilidad de obtener, a lo sumo, dos bolas blancas.

Solución: B (5; 0,4)

A) $p(x=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^3=0{,}3456$

B) $p(x\le 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}6^5+\binom{5}{1}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^4+\binom{5}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^3=$

$=0{,}0777+0{,}2592+0{,}3456=0{,}6825$

74°.- Supóngase que la probabilidad de que una persona sea mujer es ½. Se eligen al azar 100 familias de cinco hijos cada una. ¿En cuántas es de esperar que haya 2 mujeres y tres hombres?

Solución: B (5; 1/2)

p (2 mujeres y 3 hombres) $=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=0{,}3125$

En 100 familias: 100 · 0,3125 = 31 familias

75°.- Un agente de seguros vende pólizas a cinco individuos, todos de la misma edad. De acuerdo con las tablas actuariales, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años es de 3/5. Determina la probabilidad de que dentro de 30 años vivan:

a) Los cinco individuos.
b) Al menos tres.
c) Sólo dos.
d) Al menos uno.

Solución: B (5; 3/5)

A) $p(x=5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=0{,}0778$

B) $p(x\geq 3)=p(x=3)+p(x=4)+p(x=5)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5=$

$=0{,}3456+0{,}2592+0{,}0778=0{,}6826$

C) $p(x=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=0{,}2304$

D) $p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(x=0)=1-\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5=0{,}9898$

76º.- El 2 % de camiones de un determinado modelo sufre averías durante la primera semana de rodaje, cambiando el fabricante, en este caso, el camión a su propietario. Si una empresa de transporte compró 10 vehículos de este modelo, calcula la probabilidad de que durante la primera semana de rodaje:

a) Sufran avería dos camiones.
b) No se averíe ninguno de los diez.
c) Determina el número medio de camiones que tendrá que cambiar la fábrica este año si se han vendido 50.000 camiones de este modelo.

Solución: B (10; 0,02)

A) $p(x=2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^2=0{,}0153$

B) $p(x=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}98^{10}=0{,}8171$

C) 20000 · 0,02 = 1000 camiones

77º.- Clara juega al golf. La probabilidad de que Clara haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0,2. Si lo intenta cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que no acierte ninguno? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte alguno? De cada 100 lanzamientos que haga a esa distancia, ¿cuántos acertará por término medio?

Solución: B (5; 0,2)

P (no acertar ninguno) $=\binom{5}{0}\cdot 0{,}8^5=0{,}3277$

P (acertar alguno) $=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}8^5=1-0{,}3277=0{,}6723$

De 100 acierta: 100 · 0,2 = 20 lanzamientos

78º.- La probabilidad de que salga cara con una moneda trucada es de 0,45. Se lanza la moneda siete veces. Calcula la probabilidad de que:

a) Salgan exactamente tres caras.
b) Salgan, al menos, tres caras.
c) Salgan, a lo sumo, tres caras.

Solución: B (7; 0,45)

A) $p(x=3)=\binom{7}{3}\cdot 0{,}45^3\cdot 0{,}55^4=0{,}2918$

B) $p(x\geq 3)=1-p(x<3)=1-p(x=0)-p(x=1)-p(x=2)=$

$=1-\binom{7}{0}\cdot 0{,}55^7-\binom{7}{1}\cdot 0{,}45\cdot 0{,}55^6-\binom{7}{2}\cdot 0{,}45^2\cdot 0{,}55^5=1-0{,}0152-0{,}0872-0{,}2140=0{,}6836$

C) $p(x\le 3)=1-p(x>3)=1-[p(x\ge 3)-p(x=3)]=1-(0{,}6836-0{,}2918)=0{,}6082$

79º.- En una determinada región, el 30 % de sus habitantes tiene sangre de tipo A. Se analiza la sangre de 10 personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya cinco personas con sangre de tipo A, entre las examinadas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de la mitad tenga sangre de dicho tipo?
c) ¿Cuántos cabe esperar que tengan sangre de tipo A?

Solución: B (10; 0,3)

A) $p(x=5)=\binom{10}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^5=0{,}1029$

B) $p(x<5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=$

$=\binom{10}{0}\cdot 0{,}7^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^9+\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^8+\binom{10}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^7+\binom{10}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^6=$

$=0{,}0282+0{,}1211+0{,}2335+0{,}2668+0{,}2001=0{,}8497$

C) De media: 10 · 0,3 = 3 habitantes tipo A

80º.- Cuatro de cada cinco candidatos consideran que los parques de su ciudad están mal conservados. Si se eligen 10 ciudadanos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno considere que los parques están bien conservados?

Solución: B (10; 1/5); p = 1/5 (bien conservado)

$p(x\ge 1)=1-p(x<1)=1-p(x=0)=1-\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{10}=0{,}8926$

81º.- En un examen trimestral de cierta asignatura suele aprobar el 70 % de los que se presentan. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben los 8 alumnos que se han presentado en un día determinado? ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe sólo uno?

Solución: B (8; 0,7)

$p(x=8)=\binom{8}{8}\cdot 0{,}7^8=0{,}0576;\ p(x=1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^7=0{,}0012$

82º.- El 5 % de las bombillas fabricadas por una fábrica son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que 6 de 10 bombillas compradas funcionen correctamente? La empresa fabrica 150.000 durante un año. ¿Cuántas bombillas cabe esperar que sean defectuosas?

Solución: B (10; 0,95); $p(x=6)=\binom{10}{6}\cdot 0{,}95^6\cdot 0{,}05^4=0{,}001$

De 150000 se tiene: 150000 · 0,05 = 7500 defectuosas

83º.- En una epidemia de gripe, tres de cada cinco personas de una población están afectadas por dicha enfermedad. Elegidas 8 personas al azar, calcula:

a) Probabilidad de que tres de ellas padezcan la enfermedad.
b) Probabilidad de que, al menos cuatro, estén sanas.

Solución: B (8; 3/5)

A) $p(x=3)=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right) \;=0{,}1239$

B) p (al menos 4 sanos) = P (menos de 4 enfermos)

$=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=$

$=\binom{8}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{8}+\binom{8}{1}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{7}+\binom{8}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{6}+\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{5}+\binom{8}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{4}=$

$=0{,}0007+0{,}0079+0{,}0413+0{,}1239+0{,}2322=0{,}4061$

84º.- Se ha hecho un estudio sobre las causas que producen la muerte de los conejos durante el primer año de vida en una cierta zona y se ha observado que el 20 % muere porque se los come un depredador (zorro, lobo, ave rapaz, ...); el 10 % muere por enfermedad (mixomatosis, ...); y el 15 % tiene un accidente (son cazados, atropellados, ...).

a) ¿Qué probabilidad tiene un conejo de cumplir su primer año de vida?
b) En una camada de 10 conejos, ¿qué probabilidad hay de que, al menos 3, cumplan su primer año de vida?

Solución:

A) p (morir 1 conejo) = 20 + 10 + 15 = 45 %

p (vivir) = 100 – 45 = 55 %. Por tanto: p = 0,55

B) B(10; 0,55); $p(x\geq 3)=1-p(x<3)=1-p(x=0)-p(x=1)-p(x=2)=$

$=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}45^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0{,}55\cdot 0{,}45^{9}-\binom{10}{2}\cdot 0{,}55^{2}\cdot 0{,}45^{8}=1-0{,}0003-0{,}0042-0{,}0229=1-0{,}0274=0{,}9726$

85º.- En un examen tipo test hay 10 preguntas, con 4 respuestas posibles a elegir por cada una (siendo sólo una de ellas correcta). Si una persona desconoce completamente la materia y responde al azar:

a) ¿Cuántas respuestas acertará por término medio?
b) ¿Cuánto vale la desviación típica?
c) ¿Qué probabilidad tiene de acertar, al menos, cinco preguntas y, por tanto, aprobar?

Solución: B(10; $\frac{1}{4}$)

A) $\mu=10\cdot\frac{1}{4}=2{,}5$ preguntas.

B) $\sigma=\sqrt{10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=1{,}37$

C) $p(x\geq 5)=p(x=5)+p(x=6)+p(x=7)+p(x=8)+p(x=9)+p(x=10)=$

$=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{5}+\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{4}+\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=$

$=0{,}0563+0{,}0162+0{,}003+0{,}0004+0{,}00003+0{,}0600=0{,}076$