PROBABILIDAD

0.- Introducción

Muchos aspectos de nuestra vida están influidos por el azar. Nuestra constitución física, por ejemplo, viene determinada por un agrupamiento impredecible de genes. De igual forma, en el mundo que nos rodea pueden verse manifestaciones asociadas al azar: el tiempo que hará en los días próximos, los resultados de determinados juegos y deportes, etc.

Desde tiempo inmemorial, tratamos de evaluar la posibilidad de que ocurra un suceso particular cada vez que estudiamos un suceso asociado a un fenómeno o experimento que todavía no se ha realizado y, por ello, hacemos un cálculo de su posibilidad.

Desde el siglo XVII, el cálculo de la probabilidad de un suceso ha sido una preocupación seria de los matemáticos. De sus investigaciones, ininterrumpidas hasta hoy, han surgido las diferentes formas de calcular las posibilidades de los sucesos particulares y de las combinaciones de sucesos.

1.- Experimentos aleatorios. Espacio muestral

Consideremos los siguientes experimentos:

- Lanzar un objeto al vacío y medir su aceleración en la caída.
- Someter a un cubito de hielo de un centímetro cúbico a una temperatura de 80 ºC durante varios minutos y, a continuación, comprobar su estado.
- Lanzar un dado y anotar el resultado que se ha obtenido.
- Extraer una carta de una baraja y comprobar la carta elegida.

Entre estos experimentos hay algunos en los que el resultado obtenido se puede predecir antes de ser realizado, y otros en los que no es así.

Un ***experimento determinista*** es aquel en el que *puede predecirse* el resultado antes de ser efectuado.

En los dos primeros experimentos anteriores se puede asegurar de antemano el resultado. En el primero sabemos que el objeto caerá con una aceleración de 9,8 m/s^2. En el segundo, el cubito se derretirá llegando al estado líquido.

Los *experimentos deterministas* se caracterizan porque siempre que se repiten en las mismas condiciones se obtendrá el mismo resultado.

Un ***experimento aleatorio*** es aquel en el que *no puede predecirse* el resultado antes de ser efectuado.

En los experimentos de lanzar un dado y extraer una carta de la baraja no podemos predecir los resultados que se lograrán.

En el primero de ellos se conseguirá un número comprendido entre 1 y 6, pero no sabemos cuál de ellos. En el segundo puede salir cualquiera de las cartas que componen la baraja.

Los *experimentos aleatorios* se caracterizan porque, aunque se repitan en las mismas condiciones, los resultados obtenidos pueden ser diferentes.

La *teoría de probabilidades* se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

Llamaremos ***espacio muestral*** al conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Lo representaremos con la letra $\boldsymbol{E}$.

A cada uno de los resultados obtenidos al realizar un experimento aleatorio se le denomina ***elemento muestral.***

Ejemplo

1.- Calcular el espacio muestral asociado a los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda.
b) Tirar un dado.
c) Extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (*R*), 2 blancas (*B*), y 4 verdes (*V*).
d) Contar el número de piezas defectuosas de una caja con 50.

Llamamos ***experimento compuesto***, a aquel que está formado por varios experimentos simples. Una técnica muy utilizada para calcular el espacio muestral de un experimento compuesto es hacer un ***diagrama de árbol.***

Ejemplo

2.- Calcular el espacio muestral asociado a los siguientes experimentos:

a) Lanzar tres monedas.
b) Lanzar dos dados y restar los números que se obtienen.
c) Un tirador dispara a cuatro blancos distintos y anotamos si hace blanco o no.

2.- Sucesos

Se llama ***suceso*** de un experimento aleatorio a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Dicho de forma simple, un suceso es cualquier cosa que se nos ocurra afirmar sobre dicho experimento.

Así, si tiramos una moneda dos veces, serían sucesos todos los siguientes:

1. Sale al menos una cara.
2. Salen más caras que cruces.
3. La moneda cae de canto.
4. No sale ninguna cruz.

Para designarlos utilizaremos *letras mayúsculas*, ***A, B, C***...

Ejemplo

3.- Del experimento consistente en lanzar un dado, considerar los siguientes sucesos: "*salir par*", "*salir impar*", "*salir múltiplo de 3*".

Ejercicio

4.- En el experimento consistente en lanzar dos monedas, considerar los siguientes sucesos: "*salir al menos una cara*", "*salir igual resultado en las dos monedas*".

Si consideramos un experimento aleatorio y su correspondiente espacio muestral, llamamos ***espacio de sucesos*** de este experimento, al conjunto de todos los sucesos que ocurren en el experimento. Se designa por ***S.***

Si el espacio muestral E, asociado a un experimento aleatorio, tiene n elementos, el espacio de sucesos S tiene 2^n **elementos**. Siempre que contamos el número de sucesos hay que incluir el suceso imposible *(Ø)* y el suceso seguro *(E).*

Ejemplo

5.- En el experimento aleatorio de lanzar un dado especial para rellenar quinielas de fútbol y anotar el resultado, calcular el espacio muestral y el espacio de sucesos.

a) Tipos de sucesos

Los tipos más frecuentes de sucesos son:

- ***Sucesos elementales*** son los que están formados por *un solo resultado* del experimento.

Ejemplo

6.- En el experimento consistente en lanzar un dado, considerar el suceso: *"salir un dos al lanzar un dado".*

- ***Sucesos compuestos*** son los que están formados por *dos o más resultados* del experimento; es decir, por dos o más sucesos elementales.

Ejemplo

7.- En el experimento consistente en lanzar un dado, considerar el suceso: *"salir un número par al lanzar un dado".*

- ***Suceso seguro*** es el que *se verifica siempre*. Está formado por todos los resultados posibles del experimento, por tanto, coincide con el espacio muestral, ***E***.

Ejemplo

8.- En el experimento consistente en lanzar un dado, considerar el suceso: *"salir un número menor que 7 al lanzar un dado".*

- ***Suceso imposible*** es el que *nunca se verifica*. Se representa por $\boxed{\varnothing}$.

Ejemplo

9.- En el experimento consistente en lanzar un dado, considerar el suceso: *"salir un 7 al lanzar un dado".*

- ***Suceso contrario*** ***(complementario)*** de un suceso A es el suceso que se verifica cuando no se verifica A, y recíprocamente. Tiene como elementos muestrales aquellos que no están en A. Se representa por $\boxed{A^C}$.

Ejemplo

10.- En el experimento consistente en lanzar un dado, consideramos el suceso A = ***"salir par"*** , calcular el suceso contrario.

11.- Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces una moneda y observar el resultado.

a) Escribe el espacio muestral asociado.

b) Describe los sucesos: ***A* = "*obtener al menos una cara*"**

***B* = "*obtener cara en solo uno de los tres lanzamientos*"**

Ejercicios

12.- Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra *"s"* para las respuestas afirmativas y la *"n"* para las negativas.

b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso *"al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"*.

c) Describe el suceso contrario de *"más de una persona es partidaria de consumir el producto"*. *Sol.: construir un diagrama de árbol*

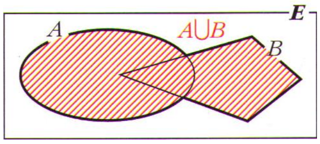
13.- Dado el suceso: *"sacar al menos una cruz al tirar dos monedas"*, calcular el suceso contrario.

14.- Dado el suceso: *"sacar oros al extraer una carta de una baraja"* , calcular el suceso contrario.

3.- Operaciones con sucesos

a) Unión de sucesos

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos ***suceso unión*** de A y B al suceso que consiste en que se cumpla al menos uno de los dos. Se representa por $\boxed{A \cup B}$. Está *formado* por los *elementos de uno* y de *otro* suceso. Representado en un diagrama de Venn:



Se cumplen las siguientes ***propiedades*** de la unión:

$$\boxed{A \cup E = E \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cup A^C = E}$$

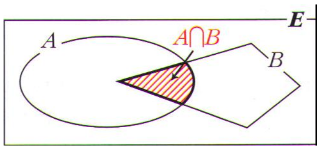
Ejemplos

15.- Del experimento consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos: $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, y calcular $A \cup B$.

16.- Del experimento consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos: A = ***"salir número par"*** y B = ***"salir múltiplo de tres"***, y calcular $A \cup B$.

b) Intersección de sucesos

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos ***suceso intersección*** de A y B al suceso consistente en que se cumplan simultáneamente A y B. Se representa por $\boxed{A \cap B}$. Está *formado* por los *elementos comunes* de *ambos*. Representado en un diagrama de Venn:



Se cumplen las siguientes ***propiedades*** de la intersección:

$$\boxed{A \cap E = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cap A^C = \varnothing}$$

Cuando $\boxed{A \cap B = \varnothing}$, decimos que los sucesos A y B son ***incompatibles***, es decir, no tienen *ningún elemento común*. Cuando no sucede esto decimos que A y B son ***compatibles***. Es decir, dos o más sucesos son ***compatibles*** si pueden verificarse simultáneamente. En caso contrario, son ***incompatibles***.

Ejemplos

17.- Del experimento consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos: $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, y calcular $A \cap B$.

18.- En la experiencia de tirar tres monedas, sea ***A* = *"sacar más caras que cruces"*** y ***B* = *"sacar una o dos cruces"***, calcular el suceso $A \cap B$.

19.- Lanzamos un dado y una moneda.

a) Describe el espacio muestral.
Sean los sucesos ***A* = *"sacar uno o dos en el dado"***; ***B* = *"sacar X en la moneda"***; $D = \{(1C), (2X), (3C), (3X), (6X)\}$
b) Describe los sucesos A y B mediante todos los elementos.
c) Halla: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cup D^C$.

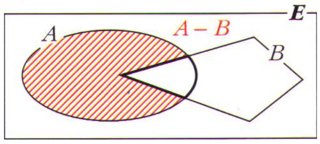
Ejercicio

20.- Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: ***A* = *"salir un número primo"*** y ***B* = *"salir un número cuadrado"***. Responde a las cuestiones siguientes:

a) Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
b) Los sucesos A y B, ¿son compatibles o incompatibles?
c) Encuentra los sucesos contrarios de A y de B.

c) Diferencia de sucesos

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, llamamos ***suceso diferencia*** de A y B al suceso consistente en que se cumpla A pero no B. Se representa por $\boxed{A-B}$. Está *formado* por todos los *elementos de A* que *no son de B*. Representado en diagramas de Venn:



Se cumplen las siguientes *propiedades* de la diferencia:

$$\boxed{(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B \qquad A-B=A\cap B^C}$$

Ejemplo

21.- Si C representa el suceso *"ser copas"* de una baraja de 40 cartas y F el suceso *"ser figura"* (sota, caballo, rey), calcula $C-F$.

d) Propiedades de las operaciones con sucesos

Al espacio de sucesos S con las operaciones unión, intersección y complementación se le llama ***álgebra de Boole*** de los sucesos aleatorios y verifican las siguientes *propiedades*:

	Unión	*Intersección*
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Elemento neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$

Además de estas sencillas propiedades, las operaciones con sucesos tienen otras dos propiedades muy importantes, conocidas como ***leyes de De Morgan:***

1. El *suceso contrario de la unión de dos sucesos* es la intersección de sus sucesos contrarios:

$$\boxed{(A\cup B)^C=A^C\cap B^C}$$

2. El *suceso contrario de la intersección de dos sucesos* es la unión de sus sucesos contrarios:

$$\boxed{(A\cap B)^C=A^C\cup B^C}$$

4.- Sistema completo de sucesos

Decimos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de un espacio muestral E, constituyen un ***sistema completo de sucesos,*** si se verifica:

1. Son *incompatibles* dos a dos, $(\boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{A}_2 = \varnothing,\ \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{A}_3 = \varnothing, \ldots)\ \boldsymbol{A}_i \cap \boldsymbol{A}_j = \varnothing$.
2. La *unión* de todos ellos es el *suceso seguro*, $\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{E}$

Ejemplo

22.- Del experimento consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos: $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 6\}$, $\boldsymbol{B} = \{3, 4\}$ y $\boldsymbol{C} = \{5\}$. Comprobar si constituyen un sistema completo de sucesos.

5.- Probabilidad

a) Definición clásica. Regla de Laplace

La *probabilidad es la medida de la incertidumbre de un suceso aleatorio*. La ***probabilidad*** es un *número* que indica las posibilidades que tiene de verificarse ese suceso al realizar el experimento aleatorio.

Hay muchas maneras de asignar probabilidades. La más sencilla e intuitiva la dio el matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), conocida como ***regla de Laplace,*** que asigna la probabilidad a cualquier suceso *A*, de acuerdo con el siguiente criterio:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A)=\frac{número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{número\ de\ casos\ posibles}}}$$

Esta l*ey sólo es aplicable cuando los sucesos elementales* son ***equiprobables***, es decir, tienen la misma probabilidad.

Los *casos favorables* son los elementos que componen el suceso *A*. Los *casos posibles* son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral.

Según esto, la *probabilidad* de un suceso será siempre un *valor comprendido* entre ***0*** y ***1***: $\boxed{0 \leq \boldsymbol{P(A)} \leq 1}$. Nunca podrá haber más casos favorables que posibles. Y *nunca podrá salir un valor negativo* ya que estamos contabilizando casos favorables y casos posibles (en el peor de los casos tendremos cero casos favorables).

Ejemplos

23.- Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:

a) Número impar.
b) Múltiplo de 3.

24.- Consideremos el experimento que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener suma igual a 8.
b) Obtener suma menor o igual a 4.

b) Definición axiomática

El <u>*inconveniente*</u> que plantea la *definición de Laplace* es que necesariamente los *sucesos elementales* tienen que tener la <u>*misma probabilidad de ocurrir*</u>.

Ejercicio resuelto

25.- De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea:

a) roja; *b)* verde; *c)* amarilla

*El espacio muestral en este caso sería: **E = {R, V, A}**, que consta sólo de tres elementos, pero sería un poco ingenuo asignar las probabilidades mediante la regla de Laplace,*

$$P(R) = 1/3,\ P(V) = 1/3,\ P(A) = 1/3$$

porque ya intuitivamente se ve que hay más posibilidades, por ejemplo, de que salga una bola roja que de que salga una bola amarilla, de modo que ¿cómo asignar probabilidades?

Fue el matemático ruso <u>**Kolmogorov**</u> (1903-1987) quién precisó este término y definió la probabilidad basándose en unos principios tan claros y evidentes que son admitidos por todos sin necesidad de demostración, son los <u>***axiomas de probabilidad.***</u>

Sea *E* el espacio muestral de un experimento aleatorio. Llamamos ***probabilidad*** a una <u>función</u>, ***P***, que <u>asigna</u> a cada <u>suceso</u> ***A*** un <u>número real</u> ***P(A)***, que cumple los siguientes <u>*axiomas*</u>:

Axioma 1 Para cualquier suceso *A, P(A)* está <u>*comprendido*</u> entre **0** y **1**:

$$\boxed{0 \le \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \le 1}$$

Axioma 2 La <u>*probabilidad del suceso seguro E*</u> es la unidad:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = 1$$

Axioma 3 Si *A* y *B* son <u>*dos **sucesos incompatibles***</u>, *A* ∩ *B* = Ø:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}$$

En esencia estos tres axiomas, indican que <u>disponemos</u> de una <u>cantidad total</u> de <u>probabilidad igual a 1</u> que hemos de <u>repartir aditivamente entre</u> los distintos <u>sucesos</u>.

Por tanto, *a partir de ahora utilizaremos la siguiente definición de probabilidad*:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\textbf{\textit{número de elementos del conjunto A}}}{\textbf{\textit{número total de elementos}}}}$$

Ejercicio resuelto

26.- *En el ejemplo de las urnas anterior, lo lógico es definir la probabilidad así: como en total hay 20 bolas y 8 son rojas, 7 verdes y 5 amarillas:* **P (R) = 8/20**, **P (V) = 7/20**, **P (A) = 5/20**

Se puede comprobar que así definida P es una probabilidad.

Sin embargo, *comprobar las propiedades* de la definición de Kolmogorov es una *labor larga y engorrosa*, puesto que hay que verificar que se cumple para todos aquellos sucesos del espacio de sucesos S, que es ciertamente amplio en muchas ocasiones. El *siguiente resultado simplifica la tarea de decidir cuándo una función P sobre el espacio de sucesos es una probabilidad*, basándose sólo en los sucesos elementales, es decir, aquellos que forman parte del espacio muestral:

Dados los *n sucesos elementales*, $w_1, w_2, \ldots, w_n$, de un experimento aleatorio cualquiera, diremos que la *función* P es una ***probabilidad*** si se cumplen las siguientes *propiedades*:

1. $\boxed{0 \leq P(w_i) \leq 1 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}}$

2. $\boxed{P(w_1) + P(w_2) + \ldots + P(w_n) = 1}$

Ejercicio resuelto

27.- Comprobar si las siguientes funciones definidas para los sucesos elementales son probabilidad, siendo $E = \{a, b, c, d\}$ el espacio muestral del experimento aleatorio:

a) **P (a) = 1/2**, **P (b) = 1/3**, **P (c) = 1/4**, **P (d) = 1/5**

Es obvio que la primera propiedad se cumple, puesto que las 4 probabilidades son números positivos menores que 1.

Para ver si se cumple la segunda, basta realizar la suma:

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 = 77/60$$

que, evidentemente no es 1, luego P no es probabilidad.

b) **P (a) = 1/4**, **P (b) = 1/2**, **P (c) = 0**, **P (d) = 1/4**

Es obvio que la primera propiedad se cumple, puesto que las 4 probabilidades son números positivos menores que 1 o cero.

Para ver si se cumple la segunda, basta realizar la suma:

$$1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$$

luego ***P*** *si es probabilidad.*

Ejemplos

28.- ¿Cuál de estas funciones definen una probabilidad en E = {**A, B, C**}? Justifica la respuesta.

a) P (A) = 1/4, P (B) = 1/3, P (C) = 1/2 *c)* P (A) = 1/6, P (B) = 1/3, P (C) = 1/2
b) P (A) = 2/3, P (B) = - 1/3, P (C) = 2/3 *d)* P (A) = 0, P (B) = 1/3, P (C) = 2/3

29.- Sea P una probabilidad definida en E = {**A, B, C**}. Encuentra P **(A)** en los casos:

a) P (B) = 1/3 y P (C) = 1/4 *c)* P (C) = 2·P (B) y P (B) = 3·P (A)
b) P (A) = 2P (B) y P (C) = 1/4

De la *definición axiomática* se deducen las siguientes ***consecuencias***:

1. La ***probabilidad del suceso contrario***, A^C, puede hallarse sabiendo que $A \cup A^C = E$ y teniendo en cuenta los axiomas 2 y 3, entonces:

$$P(A)+P(A^C)=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A^C)=1-P(A)}$$

2. La ***probabilidad del suceso imposible***, Ø, es ***cero***. Puesto que los sucesos seguro e imposible son contrarios, Ø = E^C, según la propiedad anterior:

$$P(\varnothing)=P(E^C)=1-P(E)=1-1=0 \;\Rightarrow\; \boxed{P(\varnothing)=0}$$

3. La ***probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles*** A y B, $A \cap B \neq$ Ø, es:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

4. La *probabilidad de la unión de tres **sucesos compatibles*** A, B y C, es:

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

5. La *probabilidad de un suceso A contenido en otro suceso B*, es:

$$A\subset B \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A)\le P(B)}$$

Ejemplos

30.- Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B en los siguientes casos:
a) $P(A)=1/4$, $P(B)=1/2$ y $P(A\cup B)=2/3$
b) $P(A)=0$ y $P(B)=1/2$

31.- Por una encuesta realizada entre los estudiantes de Bachillerato de un instituto, se sabe que el 40% lee el periódico y el 30% lee alguna revista de información general.
Además, el 20% lee periódicos y revistas. Con estos datos, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, lea el periódico o revistas?

Ejercicios

32.- Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 8. Se realiza un experimento que consiste en extraer una bola y anotar su número. Consideremos los siguientes sucesos: ***A* = *"salir par"*; *B* = *"salir impar"*; *C* = *"salir múltiplo de 4"***. Calcular las probabilidades de $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

33.- Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea roja.
b) Sea amarilla.
c) Sea verde.
d) Sea negra.
e) Sea roja o verde.
f) Que no sea roja.

Para el cálculo de probabilidades, tendremos en cuenta también las ***leyes de De Morgan***:

$$\boxed{P(A^C \cap B^C) = P(A \cup B)^C = 1 - P(A \cup B)}$$

$$\boxed{P(A^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C = 1 - P(A \cap B)}$$

Usaremos, de igual modo, una regla más, referente a la intersección de dos sucesos, en los que uno de ellos se verifica y del otro se verifica su contrario

$$\boxed{P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Ejemplos

34.- Sean A y B dos sucesos tales que: $P(A \cup B) = 3/4$, $P(B^C) = 2/3$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

a) $P(B)$
b) $P(A)$
c) $P(B \cap A^C)$

35.- A un congreso asisten 100 personas. De ellas 80 saben hablar francés, 40 saben hablar inglés. Hay 20 asistentes que saben hablar los dos idiomas. Se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes casos:

a) Que hable algún idioma.
b) Que no hable ni francés ni inglés.
c) Que sólo hable francés.
d) Que sólo hable inglés.

Ejercicios

36.- En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado se consideran los siguientes sucesos:

***A*: "obtener un número mayor que 4", *B*: "obtener un número par".**

a) Escribe los elementos de cada uno de los siguientes sucesos:

$$A \; ; \quad B \; ; \quad A^C \cup B \; ; \quad A \cap B^C \; ; \quad (A \cap B)^C$$

b) Calcula las probabilidades $P(A^C \cap B^C)$ y $P(A^C \cup B^C)$.

37.- En una comarca hay dos periódicos: El Progresista y El Liberal. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee El Progresista (***P***), el 40% lee El Liberal (***L***) y el 25% no lee ninguno de ellos. Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar:

a) Lea algún periódico.
b) Lea los dos periódicos.
c) Lea sólo El progresista.
d) Lea sólo El Liberal.
e) Lea sólo un periódico.

6.- *Probabilidad condicionada*

En el cálculo de las probabilidades de algunos sucesos, el *valor de dicha probabilidad varía en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos*. El incremento de información se traduce en una disminución de los casos posibles, aumentando, por tanto, la probabilidad de dichos sucesos.

Ejercicio resuelto

38.- Supongamos que estamos realizando el experimento aleatorio de lanzar un dado y obtener el número que sale. Consideramos el suceso ***A* = "sale un 4"**. Evidentemente, ***P(A)* = 1/6**

Ahora bien, ¿variaría esta probabilidad si al lanzar el dado alguien pasa por allí y nos dice que ha salido un número par?

Disponemos entonces de una información adicional, $B = \{2, 4, 6\}$

Hemos reducido nuestro espacio muestral, que ahora sólo consta de 3 elementos y tenemos que cambiar las probabilidades asignadas.

Ahora el suceso ***A*** *no tiene una posibilidad entre 6 de ocurrir, sino una entre tres, es decir,* ***P(A) = 1/3***

Esta es la idea de la probabilidad condicionada: la información obtenida, ***B****, modifica la probabilidad de* ***A****. Lo expresamos así:* ***P(A/B) = 1/3***

Llamamos ***probabilidad condicionada*** de un *suceso A por otro B* (*suceso que sabemos que se ha realizado*) y lo denotamos por $\boxed{P(A/B)}$ al cociente:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}\text{, siendo } P(B)\neq 0$$

En la práctica, resulta útil calcular la probabilidad de la forma:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{n^{o}\ de\ sucesos\ elementales\ de\ A\cap B}{n^{o}\ de\ sucesos\ elementales\ de\ B}}$$

Ejercicio resuelto

39.- Para el caso anterior, $A = \{4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{4\}$

$$P(B) = 3/6 = 1/2;\ P(A \cap B) = 1/6$$

Luego: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/6}{1/2}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, es lo mismo que obteníamos antes directamente.

Si despejamos $P(A\cap B)$, obtenemos:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)}$$

, expresión que recibe el nombre de ***probabilidad compuesta*** o del ***producto***.

Ejemplo

40.- Sean A y B dos sucesos tales que: $P(A)=0,4$, $P(B)=0,3$ y $P(A\cap B)=0,1$. Calcular: $P(A\cup B)$, $P(A^{C}\cup B^{C})$, $P(A/B)$ y $P(A^{C}\cap B^{C})$

Ejercicio

41.- Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A)=0,5$, que $P(B)=0,4$ y que $P(A\cup B)=0,8$, determina $P(A/B)$.

En algunos casos, es posible que el suceso que sepamos que se ha verificado, es el contrario de uno dado:

$$\boxed{P(A/B^{C})=\frac{P(A\cap B^{C})}{P(B^{C})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}}$$

O incluso, nos pueden pedir que calculemos la probabilidad del contrario de un suceso A, sabiendo que se ha verificado el contrario de otro suceso B:

$$\boxed{P(A^C / B^C) = \frac{P(A^C \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}}$$

En otros ejemplos, veremos que el suceso conocido es a su vez, la unión o la intersección de otros dos sucesos:

$$\boxed{P(A / A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}}$$

en este caso, el enunciado del problema nos dirá que sabemos que se ha verificado uno de los dos sucesos dados (por eso ponemos la unión de A y B como suceso conocido).

Ejemplos

42.- Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$. Calcula $P(A/B^C)$, $P(B/A^C)$ y $P(B^C/A)$.

43.- En un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$. Calcula $P(A/B)$ y $P((A \cap B)/A)$.

44.- En un curso, el porcentaje de aprobados en Lengua es del 65% y en Filosofía del 50%. Se sabe que la probabilidad $P(F/L) = 0{,}7$, siendo F y L los sucesos ***"aprobar Filosofía"*** y ***"aprobar Lengua"***, respectivamente.

a) Calcula $P(L/F)$.

b) Halla la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas.

Ejercicios

45.- En un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(B/A)$

c) $P(A^C \cup B)$

d) $P(A/(A \cap B))$

46.- En un espacio muestral se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A \cup B) = 1$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ y $P(A/B) = \frac{1}{3}$. Halla la probabilidad del suceso A y la del suceso B.

7.- Probabilidad en tablas de contingencia y diagramas de árbol

En los problemas de probabilidad y en especial en los de probabilidad condicionada resulta interesante y práctico organizar la información mediante el empleo de tablas de doble entrada, denominadas ***tablas de contingencia*** o mediante ***diagramas de árbol.***

Las *tablas de contingencia* están formadas por celdas en las que pueden figurar frecuencias absolutas, frecuencias relativas, porcentajes y probabilidades.

No es preciso que nos den todos los datos de la tabla, pues es posible construirlas completando unas celdas a partir de otras.

En general, una tabla de contingencia de 2 × 2, con probabilidades, es de la forma:

	A	A^C	**TOTAL**
B	$P(A \cap B)$	$P(A^C \cap B)$	$P(B)$
B^C	$P(A \cap B^C)$	$P(A^C \cap B^C)$	$P(B^C)$
TOTAL	$P(A)$	$P(A^C)$	1

Para *componer el diagrama de árbol* y obtener la probabilidad deseada a partir de él, hemos de tener en cuenta las normas siguientes:

- En la formación del árbol *se abrirán tantas ramas como resultados posibles tenga el experimento*, aunque en la práctica se puedan obviar algunas de dichas ramas, que corresponden a resultados que no intervienen en el suceso cuya probabilidad se busca.
- En cada una de las *ramas se indicará la probabilidad del suceso correspondiente*.
- Una vez formado el árbol, para *calcular la probabilidad del suceso* que representa una de sus ramas se *multiplican las probabilidades que aparecen a lo largo de dicha rama*.
- Si un *suceso comprende varias ramas, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de todas ellas*, que se calculan según se indica en el punto anterior.

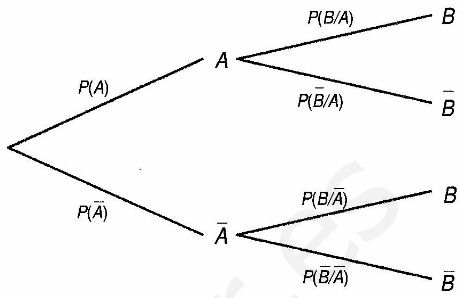
La *suma de las probabilidades asociadas* a todas las *ramas* que *parten* de un *suceso* es igual a ***1.***

Las tablas de contingencia y los diagramas de árbol están íntimamente relacionados, dado uno de ellos podemos construir el otro.

a) Conversión de una tabla en diagrama de árbol

	A	A^C	*TOTAL*
B	$P(A \cap B)$	$P(A^C \cap B)$	$P(B)$
B^C	$P(A \cap B^C)$	$P(A^C \cap B^C)$	$P(B^C)$
TOTAL	$P(A)$	$P(A^C)$	1

La tabla anterior adopta la forma del diagrama de árbol del dibujo. En éste, a cada uno de los sucesos A y A^C $(=\overline{A})$ se les ha asociado los sucesos B y B^C $(=\overline{B})$.



Sobre las ramas del diagrama de árbol se han *anotado* las *probabilidades* condicionadas correspondientes, deducidas de las relaciones análogas a:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Debe tenerse en cuenta que para calcular la probabilidad de los sucesos que se obtienen como resultado de recorrer las ramas del diagrama de árbol: A y B, A *y* B^C, A^C y B o A^C y B^C, hay que multiplicar las probabilidades que se indican de las ramas recorridas.

b) Conversión de un diagrama en tabla de contingencia

De manera recíproca, dado el diagrama de árbol podemos construir la tabla de contingencia equivalente sin más que utilizar la expresión:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

para calcular las probabilidades de las intersecciones de sucesos que forman la tabla.

Ejemplos

47.- Una encuesta revela que el 35% de los habitantes de La Laguna, oyen la cadena Ser, el 28% la Cope y el 10% ambas emisoras. Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar:

a) Escuche alguna emisora.
b) No escuche ninguna.
c) Escuche sólo la Ser.
d) Escuche sólo la Cope.
e) Escuche sólo una emisora.

48.- Se extraen, sucesivamente, dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un rey y la segunda un as? ¿Y de obtener dos reyes?

49.- En una urna tenemos bolas rojas y bolas blancas. Unas son de madera y otras son de cristal. La distribución de bolas es la siguiente:

	R	***B***
M	*7*	*25*
C	*32*	*36*

Se extrae una bola. Sabemos que es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de cristal?

Ejercicios

50.- En una universidad hay tres facultades A, B y C. En total hay matriculados 1000 alumnos de los que 400 son chicos. En la facultad A hay un 20% del total de alumnos y de ellos 50 son chicos. En la facultad B hay 300 chicas y 200 chicos matriculados.

a) ¿Qué % de los alumnos de esta universidad estudia en la facultad C?
b) ¿Qué tanto por ciento de los alumnos estudian en la facultad A y son chicas?

51.- Para tratar de curar una enfermedad se ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de individuos, obteniéndose los resultados reflejados en la tabla

	Curados	***No curados***	***Totales***
Tratamiento nuevo	60	21	81
Tratamiento antiguo	43	36	79
	103	57	160

Elegido un individuo al azar, hallar las siguientes probabilidades:

a) Que se haya curado.
b) Que no se haya curado.
c) Que se haya curado con el nuevo tratamiento.
d) Que no se haya curado con el nuevo tratamiento.
e) Que se haya curado con el tratamiento antiguo.

8.- Sucesos independientes

Se ha visto que la finalidad de la probabilidad condicionada es recoger la influencia que puede ejercer un suceso sobre otro. Pero hay sucesos en los que, conociendo lo que ha ocurrido, no se modifica la probabilidad del otro, decimos que son **sucesos independientes**. En consecuencia, se dice que dos ***sucesos A y B son independiente*** si:

$$\boxed{P(A/B)=P(A)} \text{ y } \boxed{P(B/A)=P(B)}$$

es decir, la *presencia* de *B* *no influye en la probabilidad* de que *A* ocurra o no, y viceversa.

Si *A y B* son dos *sucesos independientes*, también los son *A y* B^C, A^C *y B* o A^C *y* B^C.

Ejercicio resuelto

52.- En el experimento de lanzar un dado, consideramos los sucesos: ***A* = {*sacar un número par*}** y ***B* = {*sacar un número menor o igual que 2*}**, es decir, ***A* = {*2, 4, 6*}**, ***B* = {*1, 2*}**. Calculemos la probabilidad de ***A*** conociendo que se ha realizado el suceso ***B***, es decir, ***P*(*A/B*)**.

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/6}{1/3}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0,5$, puesto que ***P(A ∩ B) = P(sacar par y menor o igual que 2) = 1/6*** y ***P(B) = 1/3***.

Pero, si no conociésemos la información ***B***, ¿cuál sería la probabilidad de ***A***?

P(A) = P(sacar par) = 3/6 = 0,5, es decir que ***P(A/B) = P(A)***, y por tanto el conocer la información ***B*** no modifica la probabilidad de ***A***, diremos que los sucesos ***A*** y ***B*** son independientes.

De acuerdo con la definición de probabilidad condicionada, la igualdad anterior se puede escribir:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

, de donde obtenemos que:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \quad \textit{si} \quad A \textit{ y } B \textit{ son independientes}}$$

Nota: *no se deben confundir los conceptos de sucesos incompatibles y sucesos independientes. Uno se refiere a* ***conjuntos*** *y el otro a* ***probabilidades****.*

Ejemplos

53.- Dos sucesos ***A*** y ***B*** son tales que $P(A)=0,3$; $P(B/A)=0,1$ y $P(A\cup B)^C=0,63$:

a) Deduce si ***A*** y ***B*** son independientes.
b) Calcula $P(A^C\cup B^C)$ y $P(B^C/A)$.

54.- De dos sucesos A y B conocemos que $P(A \cup B) = 2/3$ y $P(A) = 1/5$, calcula $P(A \cap B)$ y $P(B)$ para que A y B sean independientes.

55.- Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,65$. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

a) ¿Son incompatibles A y B ?
b) ¿Son independientes A y B ?
c) Calcula $P(A / B^C)$.

Ejercicios

56.- Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes. Se sabe que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$. Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$.
b) $P(A / B^C)$.

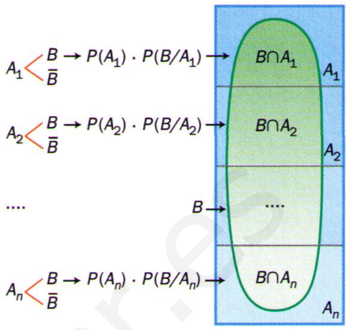
57.- Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A^C) = 0,2 \text{ , } P(B) = 0,25 \text{ y } P(A \cup B) = 0,85$$

a) ¿Son los sucesos A y B independientes?
b) Calcula $P(A^C / B^C)$.

9.- Teorema de la probabilidad total

Con frecuencia, cuando se contempla la ocurrencia de un suceso se han de analizar diversos escenarios en los que haya podido ocurrir, no siendo uno solo el responsable de su acaecimiento. Por ejemplo, un accidente de automóvil puede ocurrir como consecuencia de conducir ebrio, de que ha llovido, de que hay niebla, etc; y también no ocurrir, aun dándose algunas de esas circunstancias.



Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un <u>*sistema completo de sucesos*</u> ($A_i \cap A_j = \emptyset$; $A_1 \cup \ldots \cup A_n = E$) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del mismo espacio muestral, del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la <u>***probabilidad total***</u> del suceso B viene dada por la expresión:

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)}$$

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

*Se aplica esta expresión cuando se pregunta por la probabilidad total de un suceso, **B**, de la última experiencia y se conocen las probabilidades condicionadas de este suceso a los sucesos de la primera experiencia. Es decir, se debe calcular la probabilidad de un suceso al que se puede llegar por varios caminos del árbol.*

Ejemplos

58.- Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

59.- Tenemos dos urnas. La urna ***A***, contiene 3 bolas verdes, 2 rojas y 1 negra; la urna ***B***, contiene 1 bola verde, 1 roja y 2 negras. La experiencia consiste en extraer una bola de la urna ***A***, introducirla en ***B***, remover y extraer, finalmente, una bola de la urna ***B***. Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) Roja

b) Verde

c) Negra

Ejercicios

60.- Un ratón huye de un gato. Puede entrar por cada uno de los callejones, A, B o C. En cada uno de ellos el gato puede alcanzarlo (+) o no. Se dan las siguientes probabilidades: P (*entre por A*) = $P(A) = 0{,}3$; P (*lo cace habiendo entrado en A*) = $P(+/A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(+/B) = 0{,}6$; $P(C) = 0{,}2$; $P(+/C) = 0{,}1$. Calcular la probabilidad de que el gato cace al ratón.

61.- En cierta población, un 20% de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25% en la industria (I) y el resto en el sector servicios (S). Un 63% de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38% y 44% en los otros dos sectores. Seleccionado un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?

62.- Tenemos un dado y dos urnas. La urna *I*, contiene 6 bolas verdes, 3 rojas y 1 negra; la urna *II*, contiene 2 bolas verdes, 6 rojas y 2 negras. Si sale 1 o 2 extraemos una bola de la urna *I*, si sale 3, 4, 5 o 6 extraemos una bola de la urna *II*. Hallar: $P(R)$, $P(V)$ y $P(N)$.

10.- Probabilidades “a posteriori”. Teorema de Bayes

Como consecuencia del teorema de la probabilidad total y de las propiedades de la probabilidad condicionada, resulta este importante teorema que permite calcular probabilidades condicionadas. Lo aplicaremos, por tanto, cuando queramos calcular, bajo las mismas condiciones anteriores, la probabilidad de un suceso, sabiendo que se ha verificado otro.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *n* sucesos incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$), cuya unión es el espacio muestral E ($A_1 \cup \ldots \cup A_n = E$) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del mismo espacio muestral, del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces, según el **teorema de Bayes**, las probabilidades $P(A_i/B)$ viene dada por la expresión:

$$\boxed{P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}}$$

En el numerador aplicaremos la probabilidad del producto y en el denominador aplicaremos el teorema de probabilidad total.

Las probabilidades $P(A_i)$ reciben el nombre de *probabilidades a priori*, por formularse antes de la presencia del suceso B, y las probabilidades $P(A_i/B)$ se denominan *probabilidades a posteriori*, pues su cálculo se realiza después de contar con una información adicional suministrada por aquel suceso.

Ejemplos

63.- En el ejemplo del ratón y el gato, observamos cómo un gato persigue a un ratón. Al poco rato llega con él en la boca. ¿En cuál de los tres caminos lo habrá cazado?

64.- En el ejemplo 59:

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera?

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de la primera haya sido negra?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera verde, siendo verde la segunda?

Ejercicios

65.- Se tienen dos urnas U y U' con las siguientes composiciones:

U = 10 bolas blancas, 7 negras y 5 rojas;
U′ = 24 bolas blancas, 4 negras y 9 rojas.

Se saca una bola al azar de la urna U y se introduce sin mirarla en la urna U', y a continuación se extrae una bola de U' que resultó ser negra. Se desea saber cuál es la probabilidad de que la bola pasada de U a U' haya sido blanca.

66.- Una emisora de televisión emite dos series: A y B. La serie A la ve el 20% de la población, mientras que la serie B sólo la ve el 15%. Sin embargo, mientras que el 70% de los que empiezan a ver la serie A la sigue hasta el final, el 80% de los que empiezan a ver la serie B la acaban. Si elegimos a una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea hasta el final la serie? Si sabemos que una persona ha terminado de ver la serie, ¿cuál es la probabilidad de que viera la serie A?

11.- Resumen

Probabilidad de la unión de sucesos ***incompatibles***	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
Probabilidad de la unión de sucesos ***compatibles***	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
Leyes de ***De Morgan***	$P(A^C\cap B^C)=P(A\cup B)^C=1-P(A\cup B)$ $P(A^C\cup B^C)=P(A\cap B)^C=1-P(A\cap B)$
Ocurrencia de un suceso y el contrario de otro	$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$
Probabilidad ***condicionada***	$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
Probabilidad condicionada, cumpliéndose el contrario de un suceso	$P(A/B^C)=\dfrac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$ $P(A^C/B^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$
Probabilidad condicionada, cumpliéndose la unión de dos sucesos	$P(A/A\cup B)=\dfrac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}$
Probabilidad ***compuesta*** o del ***producto***	$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$
Probabilidad de sucesos ***independientes***	$P(A/B)=P(A)$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
Teorema de ***probabilidad total***	$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$
Teorema de ***Bayes***	$P(A_i/B)=\dfrac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$