Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Año 2017

4.1.1. Modelo

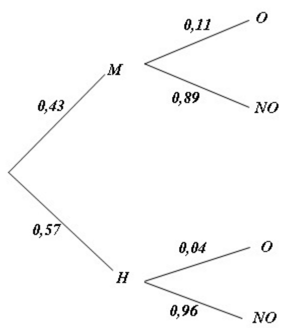
Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.

b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?

Solución:



a) $P(O) = P(M)P(O|M) + P(H)P(O|H) = 0,11 \cdot 0,43 + 0,04 \cdot 0,57 = 0,0701$

b) $P(M|O) = \dfrac{P(O|M)P(M)}{P(O)} = \dfrac{0,11 \cdot 0,43}{0,0701} = 0,6748$

4.1.2. Ordinaria

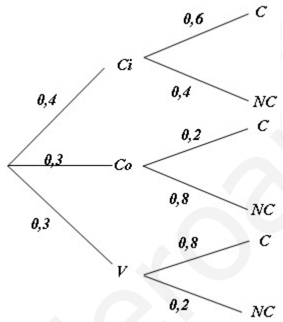
Opción B

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto). Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Solución:



a) $P(NC) = P(Ci)P(NC|Ci) + P(Co)P(NC|Co) + P(V)P(NC|V) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,46$

b) $P(Ci|C) = \dfrac{P(C|Ci)P(Ci)}{P(C)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,4}{1 - 0,46} = 0,44$

4.1.3. Ordinaria-Coincidente

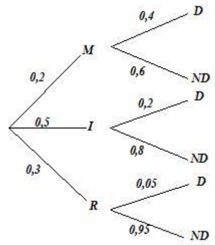
Opción B

Problema 4.1.3 *(2 puntos)* En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50 % ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40 % ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5 %. Elegido un empleado al azar, se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) (1 punto) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

Solución:



a) $P(D) = P(M)P(D|M)+P(I)P(D|I)+P(R)P(D|R) = 0,4\cdot 0,2+0,2\cdot 0,5+0,05\cdot 0,3 = 0,195$

b) $P(M|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|M)P(M)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,6\cdot 0,2}{1-0,195} = 0,149$

4.1.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.1.4 *(2 puntos)* Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \dfrac{4}{9}$, $p(B) = \dfrac{1}{2}$ y $p(A\cup B) = \dfrac{2}{3}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

Solución:

$$P(A) = \frac{4}{9}\quad P(B) = \frac{1}{2}\quad P(A\cup B) = \frac{2}{3}$$

a) $P(A)\cdot P(B) = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{18}$

Luego $P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B) \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

b) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{9}$

4.1.5. Extraordinaria-Coincidente

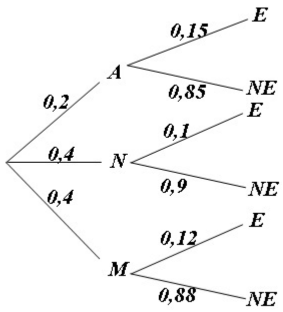
Opción A

Problema 4.1.5 *(2 puntos)* Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M. El 20 % de los móviles fabricados son de la marca A y el 40 % de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15 % de los móviles de la marca A, en un 10 % de la marca N y en un 12 % de los móviles de la marca M. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) (1 punto) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Solución:



a) $P(E) = P(A)P(E|A)+P(N)P(E|N)+P(M)P(E|M) = 0,0,2\cdot 0,0,15+0,4\cdot 0,1+0,4\cdot 0,12 = 0,118$

b) $P(A|E) = \dfrac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \dfrac{0,15\cdot 0,2}{0,118} = 0,254$

4.2. Año 2018

4.2.1. Modelo

Opción B

Problema 4.2.1 *(2,5 puntos)* En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

c) (1 punto) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

Solución:
Sale fresa: F, sale menta: M y sale limón: L

a) $P(2^\circ \text{ de fresa}) = P(FF) + P(MF) + P(LF) = \dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9}{29} + \dfrac{15}{30}\cdot\dfrac{10}{29} + \dfrac{5}{30}\cdot\dfrac{10}{29} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(FF) = \dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9}{29} = \dfrac{3}{29}$

c) $P(\text{primero fresa}|\text{segundo fresa}) = \dfrac{P(\text{primero fresa} \cap \text{segundo fresa})}{P(\text{segundo fresa})} = \dfrac{10/30\cdot 9/29}{1/3} = \dfrac{9}{29}$

4.2.2. Ordinaria

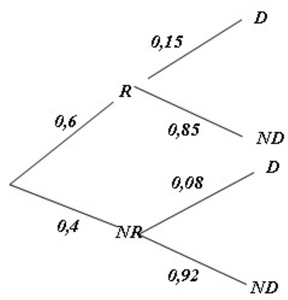
Opción A

Problema 4.2.2 *(2,5 puntos)* El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:



a) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|NR)P(NR) = 0,15 \cdot 0,6 + 0,08 \cdot 0,4 = 0,122 \Longrightarrow 12,20\,\%$

b) $P(R|D) = \dfrac{P(D|R)P(R)}{P(D)} = \dfrac{0,15 \cdot 0,6}{0,122} = 0,7377 \Longrightarrow 73,77\,\%$

4.2.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.2.3 *(2,5 puntos)* La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las películas de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de esos géneros cinematográficos. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a) (0,25 puntos) No le gusten las películas de acción.

b) (0,75 puntos) Le guste al menos uno de los dos géneros mencionados.

c) (0,75 puntos) Le guste el cine de acción y el de suspense.

d) (0,75 puntos) Le gusten las películas de acción, pero no las de suspense.

Solución:
A : le gusta las de acción y S : le gusta las de suspense. $P(A) = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $P(S) = \dfrac{135}{300} = \dfrac{9}{20} = 0,45$ y $P(\overline{A} \cap \overline{S}) = \dfrac{75}{300} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$

b) $P(A \cup S) = 1 - P(\overline{A \cup S}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

c) $P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{20} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{5} = 0,2.$

d) $P(A \cap \overline{S}) = P(A) - P(A \cap S) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

Opción B

Problema 4.2.4 *(2,5 puntos)* Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,2$. Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B), \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap B), \quad P(\overline{A}|B)$$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,2$ y por ser A y B independientes $P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$.

- ☛ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,12 = 0,68$
- ☛ $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,12 = 0,88$
- ☛ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,68 = 0,32$
- ☛ $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,12 = 0,08$
- ☛ $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,08}{0,2} = 0,4$

4.2.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.2.5 *(2,5 puntos)* Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

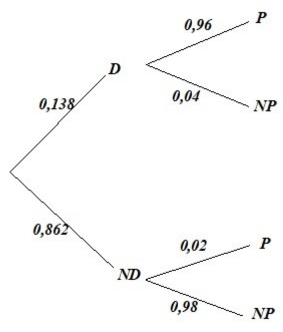
b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Solución:

$P(D) = 0,138$ y $P(\overline{S}) = 0,43$

a) $P(D \cap S) = 0,138 \cdot (1 - 0,43) = 0,07866$
$P(\overline{D} \cup \overline{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0,07866 = 0,92134$

b) Tenemos:



$$P(D|P) = \frac{P(P|D)P(D)}{P(P)} = \frac{0,96 \cdot 0,138}{P(P|D)P(D) + P(P|ND)P(ND)} =$$

$$\frac{0,13248}{0,13248 + 0,02 \cdot 0,862} = 0,88485$$

4.3. Año 2019

4.3.1. Modelo

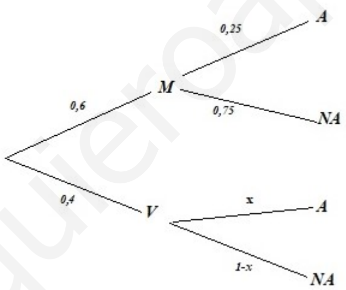
Opción B

Problema 4.3.1 *(2,5 puntos)* El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30 % del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.

b) (1,25 puntos) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

Solución:



a) $P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,6}{0,3} = 0,5$

b) $P(A) = 0,6 \cdot 0,25 + 0,4 \cdot x = 0,3 \Longrightarrow x = P(A|V) = 0,375$

$$P(A \cap V) = P(A|V)P(V) = 0,375 \cdot 0,4 = 0,15$$

4.3.2. Ordinaria

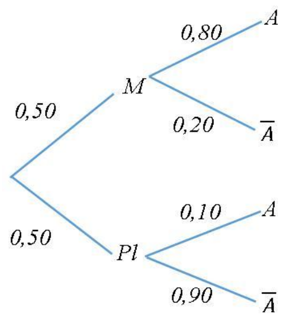
Opción B

Problema 4.3.2 *(2,5 puntos)* Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:



a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|Pl)P(Pl) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45$

b) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 0,889$

4.3.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.3.3 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos aleatorios A y B, con probabilidades respectivas $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$, se denota por $\overline{A}$ y $\overline{B}$ a los sucesos complementarios de A y B. Se pide:

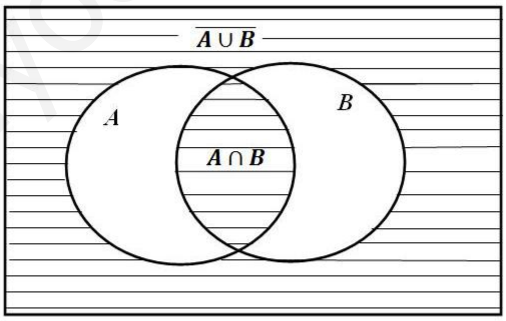
a) (1 punto) Suponiendo que A y B son independientes, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

b) (1 punto) Suponiendo que A y B son incompatibles, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

c) (0,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 0,9$, ¿son A y B independientes?

Solución:

$P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B}))$



a) Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$:

$$P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})) = P((A\cap B)\cup(\overline{A \cup B})) = P(A\cap B)+P(\overline{A \cup B})-P((A\cap B)\cap(\overline{A \cup B})) =$$
$$P(A\cap B)+P(\overline{A \cup B}) = P(A\cap B)+1-P(A\cup B) = P(A\cap B)+1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) =$$
$$1+2P(A\cap B)-P(A)-P(B) = 1+2P(A)P(B)-P(A)-P(B) = 1+0,4-0,4-0,5 = 0,5$$

b) Si A y B son incompatibles $P(A \cap B) = 0$:

$P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})) = P((A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})) = P(A\cap B)+P(\overline{A\cup B})-P((A\cap B)\cap(\overline{A\cap B})) = 0+P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = 1-P(A)-P(B) = 1-0,4-0,5 = 0,1$

c) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,4+0,5-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0 \Longrightarrow A$ y B son incompatibles. Por otra parte $P(A\cap B) = 0 \neq P(A)\cdot P(B) = 0,4\cdot 0,5 = 0,2 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.3.4. Extraordinaria

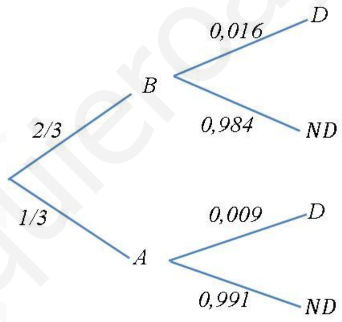
Opción B

Problema 4.3.4 *(2,5 puntos)* Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:



a) $P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) = 0,016\cdot\frac{2}{3} + 0,009\cdot\frac{1}{3} = 0,0137 \Longrightarrow 1,37\,\%$

b) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,016\cdot\frac{2}{3}}{0,0137} = 0,78 \Longrightarrow 78\,\%$

4.4. Año 2020

4.4.1. Modelo

Opción A

Problema 4.4.1 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cup B) = 0,55$, $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = 0,90$ y $P(B|A) = 0,25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b) (0,5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,90 \Longrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,90 = 0,10$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,55 + 0,10 - 0,40 = 0,25$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,25 - 0,10}{1 - 0,4} = 0,25$$

b) A y B son independientes si se cumple $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0,40 \cdot 0,25 = 0,10 \text{ y } P(A \cap B) = 0,10 \Longrightarrow$$

Los sucesos A y B son independientes.

4.4.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.4.2 *(2,5 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{B}|A)$

Solución:

a) $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(\phi) = 0 \Longrightarrow A \cup B$ y C son incompatibles.

b) $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,25 - 0,125) = 0,375$

d) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75$

4.4.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.4.3 *(2,5 puntos)* De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.

d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

Solución:
A : múltiplo de 3 (3,6,9,12,15,18), B : múltiplo de 6 (6,12,18),
C : múltiplo de 2 (2,4,6,8,10,12,14,16,18,20) y D : impar (1,3,5,7,9,11,13,15,17,19)

a) $P(AA) = \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{38}$

b) $P(BA) = \dfrac{3}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{76}$

c) $P(\overline{CC}) = P(DD) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{9}{19} = \dfrac{9}{38}$

d) $P(D2|D1) = \dfrac{9}{19}$

4.4.4. Extraordinaria

Opción A

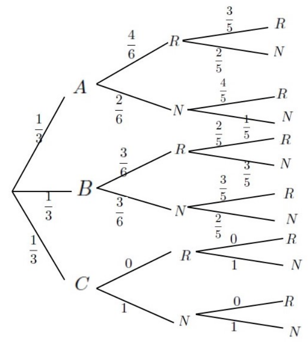
Problema 4.4.4 *(2,5 puntos)* Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Solución:
Tenemos $A : \left\{ \begin{array}{l} 4R \\ 2N \end{array} \right.$, $B : \left\{ \begin{array}{l} 3R \\ 3N \end{array} \right.$ y $C : \left\{ \begin{array}{l} 0R \\ 6N \end{array} \right.$.



a) $P(R \text{ primera}) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{3} + 0\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{18} = 0,389$

b) $P(RN) = P(RN|A)\cdot P(A) + P(RN|B)\cdot P(B) + P(RN|C)\cdot P(C) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = \dfrac{17}{90} = 0,189.$

c) $P(N2|R1) = \dfrac{P(N2|R1)}{P(R1)} = \dfrac{17/90}{7/18} = \dfrac{17}{35} = 0,486$

4.5. Año 2021

4.5.1. Modelo

Opción B

Problema 4.5.1 *(2,5 puntos)* Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) (0,5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.

b) (0,75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) (0,75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

d) (0,5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

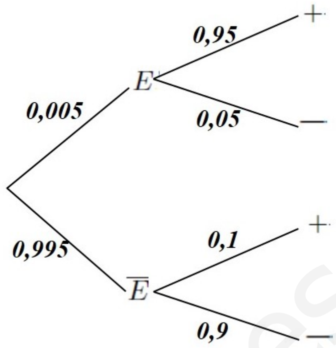
Solución:
E: enfermo, $\overline{E}$: no enfermo, $+$: positivo y $-$: negativo.
$P(-|E) = 0,05$, $P(+|\overline{E}) = 0,10$ y $P(E) = \dfrac{50}{10000} = 0,005$

a) $P(+) = P(+|E)P(E) + P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,95 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,10425$

b) $P(E|+) = \dfrac{P(+|E)P(E)}{P(+)} = \dfrac{0,95 \cdot 0,005}{0,10425} = 0,0456$

c) $P(\overline{E}|-) = \dfrac{P(-|\overline{E})P(\overline{E})}{P(-)} = \dfrac{0,90 \cdot 0,995}{1 - 0,10425} = 0,9997$

d) $P(\text{erronea}) = P(E \cap -) + P(\overline{E} \cap +) = P(-|E)P(E) + P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,05 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,09975$



4.5.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.5.2 *(2,5 puntos)* Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

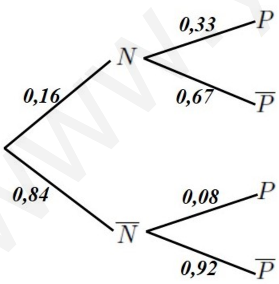
b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos ”en un día se supera el nivel permitido de NO_2” y ”en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

N: supera los niveles de NO_2 y P: supera los niveles partículas.



a) $P(N \cap P) = P(N)P(P|N) = 0,16 \cdot 0,33 = 0,0528$

b) $P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\overline{N})P(\overline{N}) = 0,33 \cdot 0,16 + 0,08 \cdot 0,84 = 0,12$
$P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P) = 0,16 + 0,12 - 0,0528 = 0,2272$

c) $P(N)\cdot P(P) = 0,16\cdot 0,12 = 0,0192 \neq P(N\cap P) \Longrightarrow N$ y P no son independientes.

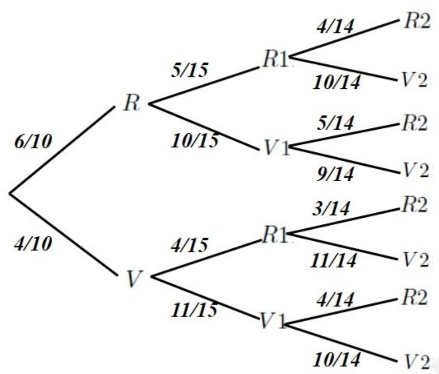
d) $P(N|\overline{P}) = \dfrac{P(\overline{P}|N)P(N)}{P(\overline{P})} = \dfrac{0,67\cdot 0,16}{1-0,12} = 0,122$

4.5.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.5.3 *(2,5 puntos)* En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.

Solución:
R sale rojo en el cajón 1, V sale verde en el cajón 1, $R1$ sale primero rojo en el cajón 2, $V1$ sale primero verde en el cajón 2, $R2$ sale segundo rojo en el cajón 2 y $V2$ sale segundo verde en el cajón 2



$$P(\text{mismo color}) = P(\text{dos rojas}) + P(\text{dos verdes}) =$$

$$P(R\cap R1\cap R2) + P(V\cap R1\cap R2) + P(R\cap V1\cap V2) + P(V\cap V1\cap V2) =$$

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} + \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14} + \frac{6}{10}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14} + \frac{4}{10}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{10}{14} = \frac{41}{75} \simeq 0,5467$$

4.5.4. Extrordinaria

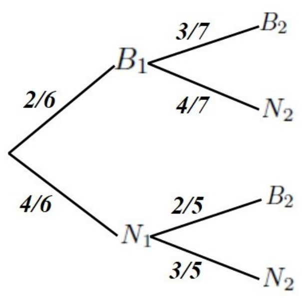
Opción A

Problema 4.5.4 *(2,5 puntos)* En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:
B_1: sale blanca en la primera extracción, N_1: sale negra en la primera extracción, B_2: sale blanca en la segunda extracción y N_2: sale negra en la segunda extracción.



a) $P(\text{distinto color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{35} = 0,457$

b) $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{43}{105}$
$P(N_1|B_2) = \frac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{43}{105}} = \frac{28}{43} = 0,651$

4.6. Año 2021

4.6.1. Modelo

Opción A

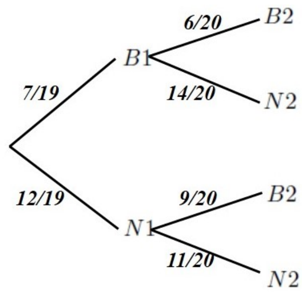
Problema 4.6.1 *(2,5 puntos)* Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

Solución:
Sean $B1$ sale blanca en la primera extracción, $B2$ sale blanca en la segunda extracción, $N1$ sale negra en la primera extracción y $N2$ sale negra en la segunda extracción.



a) $P(B2) = P(B2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) = \frac{6}{20} \cdot \frac{7}{19} + \frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{15}{38} \simeq 0,3947$

b) $P(\text{distinto color primera y segunda}) = P(N2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) = \frac{14}{20} \cdot \frac{7}{19} + \frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{103}{190} \simeq 0,5421$

c) $P(N1|B2) = \frac{P(B2|N1)P(N1)}{P(B2)} = \frac{\frac{9}{20} \cdot \frac{12}{19}}{\frac{15}{38}} = \frac{18}{25} \simeq 0,72$

Opción A

Problema 4.6.2 *(2,5 puntos)* Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0,5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0,5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0,75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ y los sucesos A y B son independientes, es decir, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$
$= 1 - (0,2 + 0,3 - 0,06) = 0,56$

c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,12 = 0,38$

d) $n = 10$, $p = 0,2$ y $q = 1 - p = 0,8 \Longrightarrow B(10; 0,2)$

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a \cdot q^{n-a}$$

$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 0,201326592$