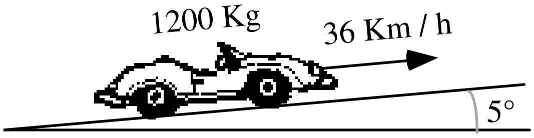
1) Un automóvil con una masa de 1200 kg se mueve hacia arriba por una colina inclinada 5° con una velocidad de 36 Km/h. Calcular a) el trabajo realizado por el motor en 5 minutos, b) la potencia desarrollada. Despreciar el trabajo de rozamiento.



Sol.: $3.078\cdot 10^6$ J, 10.26 KW

2)Un trineo de 20 kg se desliza por una colina, desde una altura de 20 m. El trineo inicia su movimiento a partir del reposo y tiene una velocidad de 16 m/s cuando llega al pie de la colina. Calcule la energía perdida por fricción. Si la pendiente de la colina es de 30° calcule el coeficiente de rozamiento cinemático entre el trineo y el suelo así como la potencia de rozamiento.

Sol.: 1364 J, $\mu = 0.2007$, potencia media = 272,8 W

3) Sobre una partícula de masa m= 4 Kg actúa una fuerza $\mathbf{F} = -2x\,\mathbf{i} - 4y\,\mathbf{j}$ N.

a) ¿Es una fuerza central? ¿Por que?,

b) Determina el trabajo que realiza dicha fuerza cuando movemos a la partícula desde la posición A (0, -2) hasta la posición B (1, -1) siguiendo la trayectoria $x = t$, $y = t^2 - 2$. Cuanto vale dicho trabajo si seguimos la trayectoria $x = t^2$, $y = -2 + t$. ¿Es una fuerza conservativa?

c) Determina la función energía potencial asociada a dicha fuerza. ¿Como son las curvas equipotenciales? Dibújalas en un plano xy

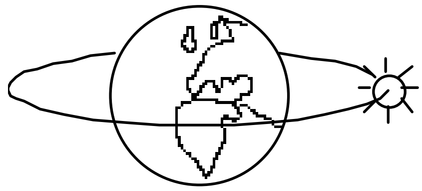
d) Haz una gráfica de la Ep en función de la coordenada x cuando tomamos y = 0. A la vista de esta gráfica, explica como será el movimiento de la partícula.

e) Si dejamos libre a la partícula con velocidad inicial 0 en la coordenada (-2,0) para un tiempo t =0, encontrar la ecuación del movimiento. Determinar su posición al cabo de 5 s.

Sol.: b) 5 J c) $Ep = x^2 + 2y^2 + cte$ e) $x = 2\cos(0{,}707\,t + \pi)$ x(5s) = 1,84 m.

4) Calcular la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica total de un satélite geosíncrono de masa 1000 kg.

Sol.: $-9.42\cdot 10^9$ J, la mitad de la energía potencial

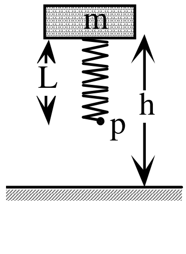


5) Una placa de masa m, de la que cuelga un muelle de masa despreciable y longitud natural L, se deja caer desde una altura h, ver figura (siendo K la constante recuperadora).

a) Hallar la energía cinética del sistema en el instante del contacto del extremo P del muelle con el suelo.

b) Comprobar que se cumplen las condiciones para poder aplicar la ley de conservación de la energía, y calcular mediante la misma la longitud del muelle en el instante de máxima comprensión.

c) ¿Permanecerá en equilibrio el sistema a partir de dicho instante?

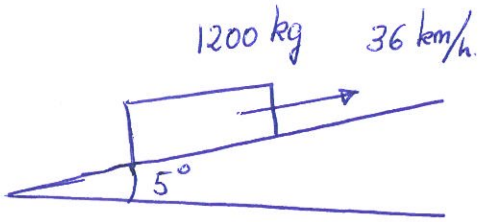


Sol.: a) mg(h - L) b) $L - C - [C\,[C + 2\,(h - L)]]^{1/2}$ con C = mg / K c) no.

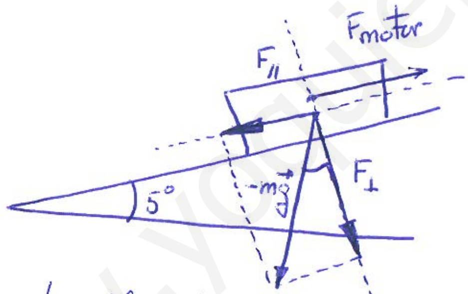
6) Un proyectil de 2 g sale de la boca de un fusil con una velocidad de 300 m/s. La fuerza que actúa sobre él mientras está en el cañón es $F = 400 - (4\,10^5\,t / 3)$ N con t en s. Hallar el tiempo necesario para que recorra la longitud del cañón.

Sol.: 0,003 s

Problema 1: Un automóvil con masa de 1200 kg se mueve hacia arriba por una colina inclinada 5° con una velocidad de 36 km/h. Calcular a) el trabajo realizado por el motor en 5 minutos, b) la potencia desarrollada. Despreciar el trabajo de rozamiento.



Sólamente la componente del peso paralela a la rampa realiza trabajo. Ni la componente perpendicular del peso ni la normal realizan trabajo por ser perpendiculares al desplazamiento:



$F_\perp = -mg \cdot \cos 5° = -1.173 \cdot 10^4 \text{ N}$

$F_{//} = -mg \cdot \operatorname{sen} 5° = -1.026 \cdot 10^3 \text{ N}$

$|F_{motor}| = |F_{//}|$

El motor del coche tiene que ejercer una fuerza sobre el coche de módulo igual a $F_{//}$ y de sentido opuesto para mantener el coche con velocidad constante (sin aceleración).

En 5 minutos, el coche se habrá desplazado en la dirección paralela a la rampa; $\Delta x'$

$$\Delta x' = 36 \frac{km}{h} \cdot \frac{1 h}{3600 s} \cdot \frac{1000 m}{1 km} \cdot 300 s = 3000 \ m$$

Con lo que el trabajo realizado por la fuerza paralela a la rampa será:

$$\underline{\underline{W}} = F_{//} \cdot \Delta x' = +1.026 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ J} = \underline{\underline{3.078 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

3) El motor realiza este trabajo en 5 minutos, con lo que la potencia desarrollada será:

$$\mathcal{P} = \frac{W}{t} = \frac{3.078 \cdot 10^3 \, J}{300 \, s} = 1.026 \cdot 10^4 \, w = 10.26 \, kw$$

Otra manera de calcular la potencia es

$$\underline{\underline{\mathcal{P}}} = F_{motor} \cdot v = 1.026 \cdot 10^3 \, N \cdot 10 \, m/s = 10.26 \cdot 10^3 \, W = \underline{\underline{10.26 \, kw}}$$

Problema 2: Un trineo de 20 kg se desliza por una colina desde una altura de 20 m. El trineo inicia su movimiento a partir del reposo y tiene una velocidad de 16 m/s cuando llega al pie de la colina. Calcule la energía perdida por fricción. Si la pendiente de la colina es de 30° calcule el coeficiente de rozamiento cinemático entre el trineo y el suelo así como la potencia de rozamiento.

En lo alto de la colina, toda la energía del sistema (el trineo) es potencial gravitatoria, ya que su velocidad es nula:

$$E_{inicial} = K_{inicial} + U_{inicial} = U_{inicial} = mgh$$

$$= 20\,kg \cdot 9.81\,m/s^2 \cdot 20\,m = 3924\,J$$

(Hemos tomado como cero de energía potencial y origen de altura el pie de la colina).

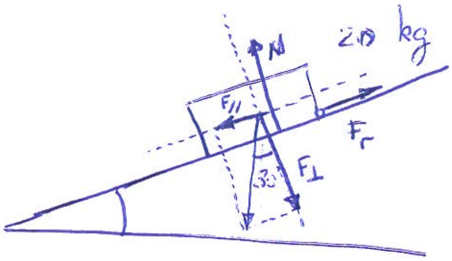
En el pie de la colina, toda la energía será cinética:

$$E_{final} = K_{final} + U_{final} = K_{final} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$= \frac{1}{2}\, 20\,kg \cdot \left(16\,m/s\right)^2 = 2560\,J$$

La ~~energ~~ diferencia de energías entre la posición final e inicial será el trabajo disipado por fuerzas no conservativas (el rozamiento):

$$\underline{W_{rozamiento}} = E_{inicial} - E_{final} = (3924 - 2560)\,J = \underline{1364\,J}$$



Las fuerzas netas que actúan sobre el trineo son:

- peso : $-m\vec{g}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{- componente } \perp \text{ a la rampa: } -mg \cdot \cos 30 \\ \text{- componente } // \text{ a la rampa: } -mg \cdot \text{sen } 30 \end{cases}$
- la normal $\vec{N}$
- la fuerza de rozamiento.

La fuerza neta perpendicular a la rampa se anula:

$$F_\perp + N = -mg \cdot \cos 30 + N = 0 \Longrightarrow N = mg \cos 30$$

La fuerza neta paralela a la rampa es la responsable de la aceleración:

$$\sum F_{ext}^{paralelas} = -mg \cdot \text{sen} 30 + F_r = -mg \,\text{sen} 30 + \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$-mg \,\text{sen } 30 + \mu \cdot mg \cos 30 = ma$$

$$\mu = \frac{a + \cancel{m}g \,\text{sen } 30}{g \cos 30} \qquad (1)$$

Por otra parte, como la aceleración es constante:

$$v_{x'f}^2 = v_{x'i}^2 + 2 a_{x'} (x'_f - x'_i)$$

donde x' se refiere a la dirección paralela a la rampa.

$v_{x'f} = 16 \ m/s$ $\qquad$ $x'_i = 20/\text{sen}30 \ m = 40 \ m$

$v_{x'i} = 0 \ m/s$ $\qquad$ $x'_f = 0 \ m$

Luego:

$$a_{x'} = \frac{v_{x'f}^2 - v_{x'i}^2}{2\,(x'_f - x'_i)} = -3.2 \ m/s^2$$

Reemplazando este valor de la aceleración en (1):

$$\underline{\underline{\mu = 0.2007}}$$

• Conocida la posición inicial y final, la aceleración y la velocidad inicial, podemos calcular el tiempo que tarda el trineo en caer.

$$x'_f = x'_i + v_{x'} \cdot t + \frac{1}{2} a_{x'} \cdot t^2$$

$$x'_f = x'_i + \frac{1}{2} a_{x'} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot (x'_f - x'_i)}{a_{x'}}}$$

Reemplazando los datos del problema:

$$t = 5 s$$

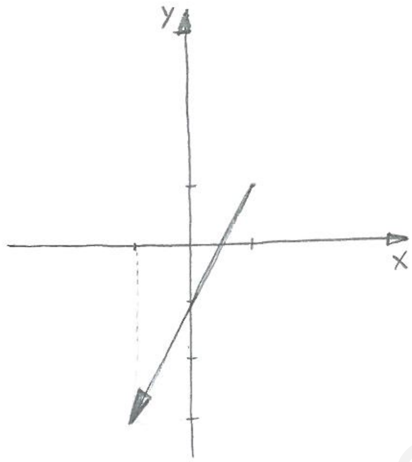
En 5s, el rozamiento realiza un trabajo de 1364 J con lo que la potencia media vale:

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1364 \ J}{5 \ s} = \underline{\underline{272.8 \ W}}$$

Problema 3: Sobre una partícula de masa $m = 4$ kg actúa una fuerza $\vec{F} = -2x\vec{i} - 4y\vec{j}$ N.

a) ¿Es una fuerza central. ¿Por qué?

No. Una fuerza central tiene siempre la misma dirección que el vector posición, mientras que ésta no cumple esta condición.

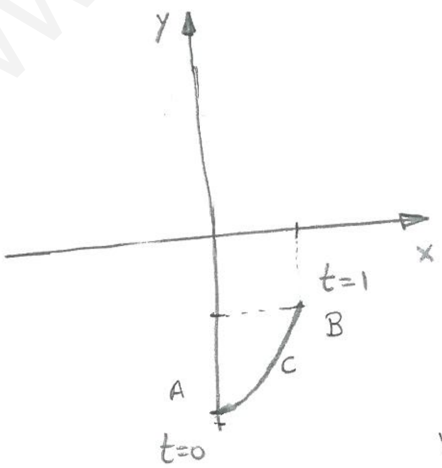


Por ejemplo, la fuerza sobre la partícula cuando ésta se encuentre en la posición (1, 1) será:

$$\vec{F} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

que no está dirigida según la dirección del vector posición.

b) determina el trabajo que realiza dicha fuerza cuando movemos a la partícula de la posición A (0,-2) hasta la posición B (1,-1) siguiendo la trayectoria $x = t$, $y = t^2 - 2$.



$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= -2x\vec{i} - 4y\vec{j} \\ d\vec{r} &= dx\vec{i} + dy\vec{j} \end{aligned}\right\} \vec{F} \cdot d\vec{r} = (-2x\,dx) - 4y\,dy$$

$$W = \int_C -2x\,dx + \int_C -4y\,dy$$

$x = t \quad y = t^2 - 2$

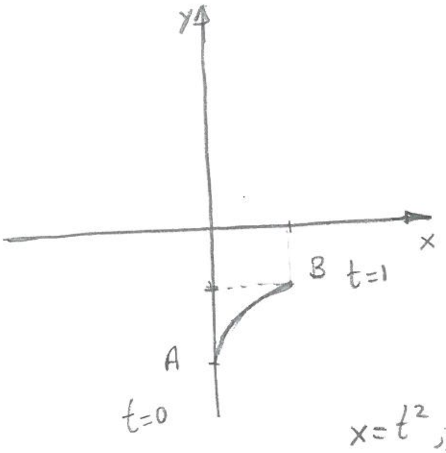
$dx = dt \quad dy = 2t\,dt$

$$= \int_0^1 -2t\,dt + \int_0^1 -4\cdot(t^2-2)\,(2t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 -2t\,dt + \int -4(t^2-2)(2t)\,dt = -\int_0^1 2t\,dt - \int_0^1 8t^3\,dt + \int_0^1 16t\,dt$$

$$= -\left.\frac{2t^2}{2}\right]_0^1 - \left.\frac{8t^4}{4}\right]_0^1 + 16\left.\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -1-2+8 = \underline{\underline{5\ J}}$$

Cuánto vale dicho trabajo si seguimos la trayectoria $x=t^2$; $y=-2+t$



$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W = -\int_c 2x\,dx - \int_c 4y\,dy$$

$x=t^2$;; $dx=2t\,dt$

$y=-2+t$;; $dy=dt$

$$= -\int_0^1 t^2\,2t\,dt - \int_0^1 4\cdot(-2+t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 4t^3\,dt + \int_0^1 8\,dt - \int_0^1 4t\,dt = -\left.\frac{4t^4}{4}\right]_0^1 + 8t\Big]_0^1 - 4\left.\frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= -1+8-2 = \underline{\underline{5\ J}}$$

Podría ser una fuerza conservativa ya que, al menos para estas dos trayectorias, el trabajo realizado por la fuerza es independiente de la misma.

c) Determina la función energía potencial asociada a dicha fuerza.
¿Cómo son las curvas equipotenciales?
Dibújalas en el plano xy.

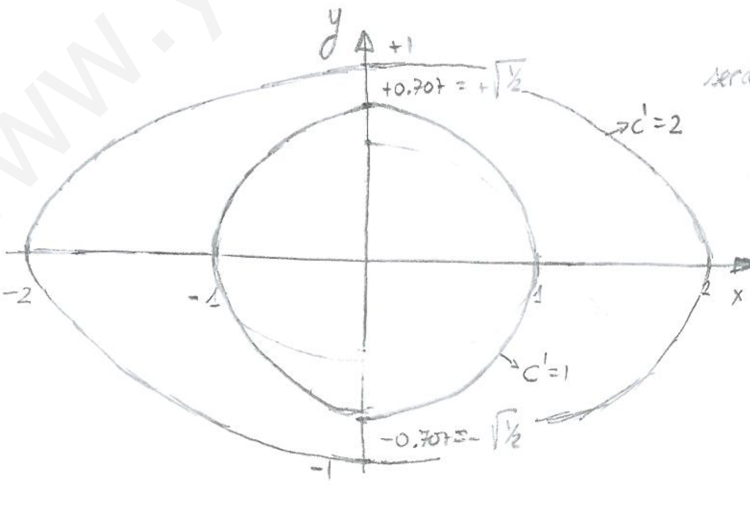
$$\vec{F} = -\nabla \cdot V(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\vec{j}$$

$$\vec{F} = -2x\,\vec{i} - 4y\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x = -\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial x} \Rightarrow \quad V(x,y) = \displaystyle\int 2x\,dx = \frac{2x^2}{2} + f(y) = x^2 + f(y) \\ \\ -4y = -\dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + f(y)\right) = -\dfrac{\partial f(y)}{\partial y} \end{array} \right.$$

$$f(y) = \int 4y\,dy = 4\,\frac{y^2}{2} + C = 2y^2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y) = x^2 + 2y^2 + C}$$



Las superficies equipotenciales serán tales que

$$x^2 + 2y^2 + C = \text{constante}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 2y^2 = \underbrace{\text{constante} - C}_{\text{esto es otra constante}} = C'$$

$$\frac{x^2}{C'} + \frac{2y^2}{C'} = 1$$

$$\frac{x^2}{C'} + \frac{y^2}{C'/2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el origen y semiejes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a^2 = C' \Rightarrow a = +\sqrt{C'} \\ b^2 = C'/2 \Rightarrow b = \sqrt{C'/2} \end{array}$$

d) Haz una gráfica de la E_p en función de la coordenada x cuando tomamos $y=0$

A la vista de esta gráfica explica como será el movimiento de la partícula:

Si $y=0$, la energía potencial como función de x tendrá la forma:

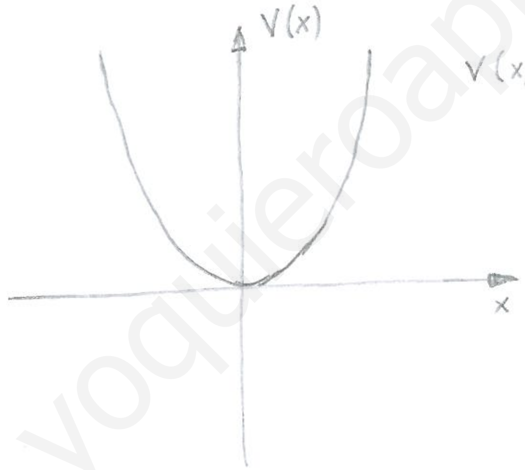
$$V(x, y=0) = x^2 + C$$

Tomamos como origen de potenciales el valor del mismo en $x=0$.

$$V(x=0, y=0) \equiv 0 = C$$

Con lo cuál

$$V(x, y=0) = x^2$$



$$V(x, y=0) = x^2 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla V = -2x\,\vec{i}$$

La segunda ley de Newton nos dice que.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

En este caso particular, con un movimiento unidimensional a lo largo de x.

$$4 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}x = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad \text{con } \omega^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$ y (A, ϕ) constants de integración.

e) Si dejamos libre la partícula con velocidad inicial cero en la coordenada $(-2,0)$ para un tiempo $t=0$, encontrar la ecuación del movimiento. Determinar su posición al cabo de 5s.

$$x(t=0) = A \cdot \cos\phi = -2$$

$$v(t=0) = -A\omega \operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \text{ó} \\ \phi = \pi \end{cases}$$

ya que la amplitud A
y la frecuencia angular $\neq 0$

Si $\phi = 0 \Rightarrow A \cdot \cos 0 = -2 \Rightarrow A = -2$

Si $\phi = \pi \Rightarrow A \cdot \cos\pi = -2 \Rightarrow A = 2$

Si tomamos la segunda solución

$$x(t) = 2\cos\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,t + \pi\right)$$

En $t = 5s$:

$$x(t=5s) = 2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 5 + \pi\right) = 1.84 \text{ m}$$

Problema 4.- Calcular la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica total de un satélite geosíncrono de masa 1000 kg. (Radio de la Tierra, R = 6370 km)

Un satélite geosíncrono realiza una trayectoria circular tardando 24 h en recorrerla completamente (M masa de la Tierra, m masa del satélite, R radio terrestre, r distancia del satélite al centro de la Tierra)

Por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{grav} = m\vec{a} \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$$

Como $g = G\dfrac{M}{R^2} \Rightarrow GM = g\cdot R^2$,

donde $g = 9,80\ m/s^2$ es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

$$\boxed{v^2 = g\frac{R^2}{r}}$$

Por otro lado $\dfrac{2\pi r}{v} = T = 24\ h$

$$\Rightarrow r = \frac{v\cdot T}{2\pi} \Rightarrow v^2 = g\cdot\frac{R^2}{\frac{v\cdot T}{2\pi}} \Rightarrow v^3 = \frac{2\pi R^2 g}{T}$$

$$\boxed{v = \left(\frac{2\pi g R^2}{T}\right)^{1/3} = 3.07\ km/s}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r = \frac{v\cdot T}{2\pi} = 42,2\cdot 10^3\ km}$$

La energía potencial gravitatoria del satélite vendrá dada por:

$$E_{pot\ grav} = -G\frac{Mm}{r} = -gm\cdot\frac{R^2}{r} = -9.42\cdot 10^9\ J$$

Para la energía cinética tenemos:

$$K = \frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{r}$$

Con lo que la energía mecánica total del satélite será:

$$E_{total} = K + E_{pot.\ grav} = \frac{1}{2} mg \frac{R^2}{r} - mg \frac{R^2}{r} = -\frac{1}{2} mg \frac{R^2}{r}$$

$$= -4.71 \cdot 10^9 \text{ J}$$

que es la mitad de lo que valía la energía potencial gravitatoria.

Problema 5.- Una placa de masa m, de la que cuelga un muelle de masa despreciable, se deja caer desde una altura h, siendo K la constante recuperadora del muelle.

a) Hallar la energía cinética del sistema en el instante de contacto del extremo P del muelle con el suelo.

Energía del muelle en el estado inicial: $E = U_1 = mgh$

Energía del muelle en el estado 2 $E = U_2 + K_2 = mgL + K_2$

Como la energía se conserva. $U_1 = U_2 + K_2$

$$mgh = mgL + K_2$$

$$K_2 = mg(h-L)$$

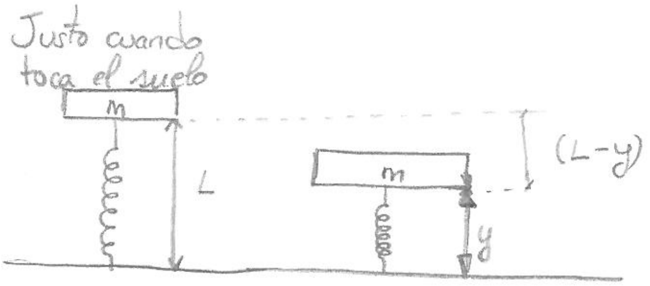
b) Comprobar que se cumplen las condiciones para poder aplicar la ley de la conservación de la energía, y calcular mediante la misma la longitud del muelle en el instante de máxima compresión.

Todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas

$\Rightarrow$ la energía se conserva.

Cuando el muelle empieza a comprimirse, la energía total del sistema masa muelle es:

$$E = K + U + E_{elástica}$$



• Cuando la masa está situada a una altura y, el muelle estará comprimido una longitud $(L-y)$

$\Rightarrow$ la energía elástica es: $\frac{1}{2}k(L-y)^2 = \frac{1}{2}k(L^2+y^2-2Ly)$

• Cuando la masa está situada a una altura y, la energía potencial vale:

$$U = mgy$$

• Cuando la masa está situada a una altura y, la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

En el punto de máxima compresión, y_m, la energía cinética del sistema es nula, con lo que la energía total del sistema vale:

$$\left(U + E_{elástica}\right)_{en\, y_p} = mgy_m + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Y como la energía se conserva

$$E = \left(U + E_{elástica}\right)_{en\ y_p}$$

$$mgh = mgy_m + \frac{1}{2}k(L-y_m)^2 = mgy_m + \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}ky_m^2 - kLy_m$$

$$\frac{1}{2}ky_m^2 + (mg-kL)y_m + \left(\frac{1}{2}kL^2 - mgh\right) = 0$$

$$y_m^2 + \frac{2}{k}(mg - kL)\, y_m + \frac{2}{k}\left(\frac{1}{2}kL^2 - mgh\right) = 0$$

$$y_m^2 + \left(\frac{2mg}{k} - 2L\right) y_m + \left(L^2 - \frac{2mg}{k}h\right) = 0$$

Si definimos $C = \frac{mg}{k}$

$$y_m^2 + (2C - 2L)\, y_m + (L^2 - 2Ch) = 0$$

$$y_m = \frac{-(2C-2L) \pm \sqrt{(2C-2L)^2 - 4(L^2 - 2Ch)}}{2} =$$

$$= \frac{-2C + 2L \pm \sqrt{4C^2 + \cancel{4L^2} - 8CL - \cancel{4L^2} + 8Ch}}{2}$$

$$= \frac{-2C + 2L \pm \sqrt{4C^2 + 8C(h-L)}}{2}$$

$$= (L - C) \pm \frac{2\sqrt{C^2 + 2C(h-L)}}{2} =$$

$$= (L - C) \pm \sqrt{C \cdot (C + 2(h-L))}$$

La solución obtenida tomando la suma no tiene sentido físico, ya que resultaría una solución $y > L$, con lo que el muelle no estaría comprimido.

Luego sólo la solución negativa tiene sentido físico.

$$\underline{\underline{y_m = L - C - \sqrt{C \cdot [C + 2(h-L)]}}}$$

c) ¿Permanecerá en equilibrio el sistema a partir de dicho instante?

No, sobre el cuerpo actuará la fuerza recuperadora del muelle y acelerará hacia arriba.

Problema 6.- Un proyectil de 2 g sale de la boca de un fusil con una velocidad de 300 m/s. La fuerza que actúa sobre ella mientras está en el cañón es $F = 400 - \frac{4 \cdot 10^5 t}{3}$ (N) con t en s. Hallar el tiempo necesario para que recorra la longitud del cañón.

La variación del momento lineal de la bala entre el instante inicial cuando se produce el disparo y el instante final, cuando la bala sale por el cañón vale:

$$\Delta p = p_f - p_i = m \cdot v_f = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 6 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Entre esos instantes, el impulso de la fuerza vale:

$$I = \int_0^t F(t')\, dt' = \int_0^t \left(400 - \frac{4 \cdot 10^5 t'}{3}\right) dt' =$$

$$= 400\, t - \frac{4 \cdot 10^5}{3} \frac{t^2}{2}$$

$$= 400\, t - \frac{2 \cdot 10^5}{3} \cdot t^2$$

La variación de la cantidad de movimiento es igual al impulso total de la fuerza neta

$$I = \Delta p$$

$$-\frac{2 \cdot 10^5}{3} t^2 + 400 t = 0.6 \quad ;; \quad \frac{2 \cdot 10^5}{3} t^2 - 400 t + 0.6 = 0$$

$$t = \frac{+400 \pm \sqrt{16 \cdot 10^4 - 16 \cdot 10^4}}{\frac{4 \cdot 10^5}{3}} = \frac{3 \cdot 400}{4 \cdot 10^5} = \frac{3 \cdot 10^2}{10^5} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\underline{t = 0.003 \text{ s}}$$