Descomposición factorial de polinomios. Ecuaciones de grado superior

1.- x=a es un cero o raíz de un polinomio P(x) si su valor numérico en x=a vale cero (P(a)=0). "Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raices reales". Las raices de enteras son divisores del término independiente. Para su cálculo se utiliza la regla de Ruffini

2.- Teorema del Resto. El resto de la división de un polinomio P(x) por x-a es igual al valor numérico de dicho polinomio por x-a (R=P(a)).
Si la división de P(x) por x-a es exacta entonces x-a es un factor de la desconposición factorial de P(x).
"Descomponer un polinomio factorialmente consiste en hallar dos o más polinomios, no constantes, tales que su producto sea el polinomio dado. Un polinomio se llama irreducible cuando no se puede descomponer en factores."
P(x)/(x-a) es exacta ⇔ R=P(a)=0 ⇔ P(x) es divisible por x-a ⇔ x-a es un factor de P(x)

3.- Caso particular: descomposición factorial de una ecuación de 2º grado. Si $ax^2+bx+c=0$ tiene por raices (soluciones) x_1, x_2. Entonces $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
Cálculo de la ecuación conocidas las raíces. $(x-x_1)(x-x_2)=0$

4.- Métodos para factorizar polinomios:

- Aplicar productos notables
- Sacar factor común
- Hallar las raices $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$

---

1. Comprobar si x=1 y x=3 son raíces de los siguientes polinomios:
$P_1(x)=x-3,\ P_2(x)=x^2-1,\ P_3(x)=x^2-5x+6;\ P_4(x)=x^3+x^2-2x$

2. Comprobar si $1+\sqrt{3}$ es raíz de $x^4-2x^3-x^2-2x-2$ Sol: Sí

3. De entre los números 0, 1, 2, 3, 4 ¿cuáles son raices del polinómio $P(x)=x^3-5x^2+4$? Sol. x=1

4. De los números $1, 0, \sqrt{2}, -1, 2$ y -3 decir cuáles son raíces y cuáles no, de cada uno de los polinomios siguientes: a) $P(x)=x^4+4x^3+3x^2$ b) $Q(x)=2x^2+10x-28$
c) $R(x)=x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}$ d) $S(x)=x^3+\left(1+\sqrt{2}\right)x^2+\sqrt{2}\,x$ e) $I(x)=x$
Sol: a) sí:0,-1,-3; b) sí:2; c) sí: $\sqrt{2}$, -1, d) sí: 0, -1, e) sí: 0

5. Utilizando la regla de Ruffini, dar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
a) $P(x)=3x^4-5x^3+2x^2-x+6$ por $x-3$ b) $P(x)=5x^4-2x^2+5$ por $x+1$
c) $P(x)=8x^3-5x^4+6x^2-x+8$ por $x-2$ d) $P(x)=6x^3-x+16$ por $x+3$

6. Comprobar que se verifica el Teorema del Resto en las divisiones del ejercicio anterior.

7. Indicar, sin hacer la división si P(x) es divisible por D(x):
a) $P(x)=3x^3-21x+18;\ D(x)=x+3$ b) $P(x)=7x^4-5x^3+3x^2-4x-1;\ D(x)=x-1$
c) $P(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}+4x^5;\ D(x)=x-\frac{1}{2}$ Sol: son todos

8. Como $x^2+2x+1=(x+1)^2$, decir si es cierto: a) $(x+1)\,|\,(x^2+2x+1)$ b) $(x^2+2x+1)\,|\,(x+1)$
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es x^2+2x+1 múltiplo de $x+1$? Sol: x+1 es divisor y x^2+2x+1 es un múltiplo.

9. Como $x^2-4x+4=(x-2)^2$, decir si es cierto: a) $(x-2)\,|\,(x^2-4x+4)$ b) $(x^2-4x+4)\,|\,(x-2)$
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es x^2-4x+4 múltiplo de $x-2$? ¿Es $x-2$ divisible por x^2-4x+4?
Sol: cierto a); x-2; sí; no.

10. Encontrar 3 polinomios divisibles por a) $3x^2+4x-1$, b) $(x-1)^2$

Sol: a) $9x^2+12x-3$; $3x^4+4x^3-x^2$; $3x^3+7x^2+3x-1$, b) $7(x-1)^2$; $(x-1)^4$, $(x-1)^9$

11. Encontrar 3 polinomios divisores y dos múltiplos de p(x)= $x^2(x^2-4)$ Sol: x^2; x+2; x-2; $x^3(x^2-4)$; $x^2(x^2-4)^2$

12. Calcular a para que 3 sea raíz del polinomio x^3-6x^2+ax-2 Sol: a=29/3

13. Hallar la descomposición factorial de los siguientes trinomios:

a) $p(x)=x^2+2x-3$ b) $p(x)=12x^2-x-1$ c) $p(x)=x^3-x^2-12x$ d) p(x)=x(x-1)-6(x-2) e) $p(x)=5x-2x^2+3$

Sol: a) p(x)=(x+3)(x-1), b) p(x)=12(x-1/3)(x+1/4), c) p(x)=x(x-4)(x+3), d) p(x)=(x-4)(x-3) e) p(x)=-2(x-3)(x+1/2)

14. Escribir los polinomios cuyos ceros son:

a) $x_1=2$; $x_2=3$ b) $x_1=-1$; $x_2=4$ c) $x_1=1/2$; $x_2=2$ d) $x_1=-2$; $x_2=-3/2$

Sol: a) $x^2-5x+6=0$, b) $x^2-3x-4=0$, c) $2x^2-5x+2=0$, d) $2x^2+7x+6=0$

15. Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^3-7x^2+7x+15$ b) $P(x)=x^4+x^3-16x^2-4x+48$ c) $P(x)=x^3-4x$
d) $P(x)=2x^3-4x^2-10x+12$ e) $P(x)=(4x^2-9)(9x^2-16)$ f) $P(x)=x^4-11x^3+41x^2-61x+30$
g) $P(x)=x^3-7x^2+12x$ h) $P(x)=6x^4-150x^2+864$

Sol: a) (x-1)(x-3)(x-5); b) (x-3)(x+2)(x-2)(x+4), c) x(x-2)(x+2); d) 2(x-1)(x+2)(x-3); e) (2x-3)(2x+3)(3x-4)(3x+4);
f) (x-1)(x-2)(x-3)(x-5); g) x(x-3)(x-4); h) P(x)=6(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)

16. Hallar al máximo común divisor de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=(x+5)(x-2)(x^2+3)$; $Q(x)=x(x+3)(x-1)(x+5)$

b) $P(x)=x^5-3x^4+3x^3-3x^2+2x$; $Q(x)=x^3-2x^2-x+2$

c) $P(x)=x^4+2x^3-11x^2-12x+36$; $Q(x)=4x^3+6x^2-22x-12$

d) $P(x)=x^5-x^4+2x^3+1$; $Q(x)=x^5+x^4+2x^2-1$

e) $P(x)=3x^4+9x^3-3x^2-12x-9$; $Q(x)=3x^3+10x^2+2x-3$

f) $P(x)=x^2+x-2$; $Q(x)=x-1$ g) $P(x)=x^4-1$; $Q(x)=x^4-2x^2+1$

h) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2-2x+1$; $R(x)=x^2+2x-3$ i) $P(x)=x^2+x+1$; $Q(x)=2x+5$

Sol: a) x+5, b) x^2-3x+2, c) x^2+x+6, d) x^3+x+1, e) x+3, f) x-1, g) x^2-1, h) x-1, i) 1

17. Hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

$P(x)=x^2+x-12$; $Q(x)=x^3-9x$ b) $P(x)=x^2+x-12$; $Q(x)=x^2-6x+9$

$P(x)=x^3-7x^2+8x-2$; $Q(x)=x^3-4x^2-10x+4$ d) $P(x)=x^7-x$; $Q(x)=x^5+x^2$

Sol: a) x(x-3)(x+3)(x+4), b) $(x+4)(x-3)^2$, c) $(x-1)(x^3-4x^2-10x+4)$ d) x^8-x^2.

18. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-7x^2+7x+15=0$ b) $x^3-2x^2-x+2=0$ c) $x^4+x^3-16x^2-4x+48=0$
d) $3x^4-2x^3-3x^2+2x=0$ e) $x^3-2x^2-5x+6=0$ f) $4x^3+4x^2-x-1=0$ g)
$6x^4+x^3-7x^2-x+1=0$ h) $4x^4-x^3-28x^2+31x-6=0$

Sol: a) -1, 3, 5; b) -1, 1, 2; c) -2, 2, 3, -4; d) 0, -1, 1, 2/3; e) 1, -2, 3; f) -1, -1/2, ½; g) -1, 1, -1/2, 1/3; h) -3, 1, 2, 5/2