EXAMEN DE MATEMÁTICAS: COMPLEJOS Y TRIGONOMETRÍA

EJERCICIO 1 Determina el valor de x para que el módulo de $\frac{x+i}{1+i}$ sea $\sqrt{5}$.

1,25 puntos

EJERCICIO 2 Demuestra la identidad :

$$\frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{tga+tgb}{1+tga\cdot tgb}$$

1,25 puntos

EJERCICIO 3 Resuelve el sistema:

$$(2+i)x + 2y = 1 + 7i$$
$$(1-i)x + iy = 0$$

1,5 puntos

EJERCICIO 4 Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo, se ve el extremo superior del pedestal bajo un ángulo de 15˚ y el extremo superior dela estatua bajo un ángulo de 40˚. Halla la altura del pedestal.

1 punto

EJERCICIO 5 Resuelve la ecuación: cosx + cos2x = 0

1 punto

EJERCICIO 6 Resuelve la ecuación $z^4 + 16 = 0$

0,75 puntos

EJERCICIO 7 El producto de dos complejos es - 27 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Hállalos y exprésalos en forma binómica.

1,25 puntos

EJERCICIO 8 Demuestra, sin utilizar la calculadora, que sen105˚ + sen15˚ = $\frac{\sqrt{6}}{2}$

0,75 puntos

EJERCICIO 9 Halla un complejo w, expresado en forma binómica, tal que:

$$\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{20}}{w} = 1+i$$

1,25 puntos

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 Determina el valor de x para que el módulo de $\frac{x+i}{1+i}$ sea $\sqrt{5}$.

$$\frac{x+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{x+i-ix-i^2}{1-i^2}=\frac{x+1}{2}+\frac{1-x}{2}i$$

$$\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow\frac{x^2+1+2x+1+x^2-2x}{4}=5\Rightarrow$$

$$\frac{2x^2+2}{4}=5\Rightarrow 2x^2+2=20\Rightarrow 2x^2=18\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$$

EJERCICIO 2 Demuestra la identidad :

$$\frac{\mathbf{sen(a+b)}}{\mathbf{cos(a-b)}}=\frac{\mathbf{tga+tgb}}{\mathbf{1+tga\cdot tgb}}$$

$$\frac{sen(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{sena\cos b+\cos a senb}{\cos a\cos b+senasenb}=(dividiendo\ por\ \cos a\cos b)=$$

$$\frac{\frac{sena\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos asenb}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{senasenb}{\cos a\cos b}}=\frac{\frac{sena}{\cos a}+\frac{senb}{\cos b}}{1+\frac{sena}{\cos a}\cdot\frac{senb}{\cos b}}=\frac{tga+tgb}{1+tga\cdot tgb}$$

EJERCICIO 3 Resuelve el sistema:

$$\begin{aligned}(\mathbf{2+i})\mathbf{x}+\mathbf{2y}&=\mathbf{1+7i}\\(\mathbf{1-i})\mathbf{x}+\mathbf{iy}&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{matrix}[(2+i)x+2y=1+7i]\,x\,i\\ [(1-i)x+iy=0]\,x\,(-2)\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}(2i+i^2)x+2iy=i+7i^2\\(-2+2i)x-2iy=0\end{matrix}\Rightarrow Sumamos\ y\ como\ i^2=-1$$

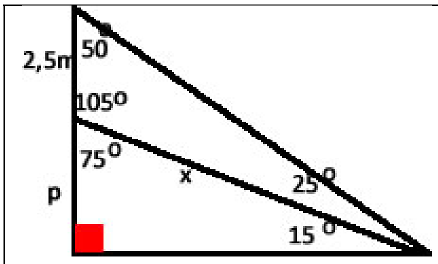
$$(2i-1)x+(-2+2i)x=i-7\Rightarrow(2i-1-2+2i)x=i-7$$

$$(-3+4i)x=i-7\Rightarrow x=\frac{i-7}{-3+4i}=\frac{i-7}{-3+4i}\cdot\frac{-3-4i}{-3-4i}=\frac{-3i-4i^2+21+28i}{(-3)^2-(4i)^2}=$$

$$\frac{25+25i}{25}\Rightarrow x=1+i$$

$$(1-i)(1+i)+iy=0\Rightarrow 2+iy=0\Rightarrow y=-\frac{2}{i}=-\frac{2i}{i^2}=2i$$

EJERCICIO 4 Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo, se ve el extremo superior del pedestal bajo un ángulo de 15˚ y el extremo superior dela estatua bajo un ángulo de 40˚. Halla la altura del pedestal.



$$\frac{sen25^\circ}{2,5} = \frac{sen50^\circ}{x} \Rightarrow x = \frac{2,5sen50^\circ}{sen25^\circ} = 4,53$$

$$sen15^\circ = \frac{p}{x} \Rightarrow p = xsen15^\circ = 1,17m$$

EJERCICIO 5 Resuelve la ecuación: cosx + cos2x = 0

$$\cos x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos x + \cos^2 x - sen^2 x = 0 \Rightarrow \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1\,,\ \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^o\ ,\quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^o, 300^o$$

EJERCICIO 6 Resuelve la ecuación $z^4 + 16 = 0$

$$z^4 = -16 = 16_{180^o} \Rightarrow z = \sqrt[4]{16_{180^o}}$$

$$k = 0 \quad \frac{180 + 0 \bullet 360}{4} = 45^o \qquad z_1 = 2_{45^o}$$

$$k = 1 \quad \frac{180 + 1 \bullet 360}{4} = 135^o \qquad z_2 = 2_{135^o}$$

$$k = 2 \quad \frac{180 + 2 \bullet 360}{4} = 225^o \qquad z_3 = 2_{225^o}$$

$$k = 3 \quad \frac{180 + 3.360}{4} = 315^o \qquad z_4 = 2_{315^o}$$

EJERCICIO 7 El producto de dos complejos es - 27 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Hállalos y exprésalos en forma binómica.

$$z = r_\alpha \quad w = s_\beta\ ;\ r_\alpha \bullet s_\beta = 27_{180^o} = rs_{\alpha+\beta'}$$

$$r_\alpha = (s_\beta)^2 = s^2_{2\beta}$$

$$\alpha = 2\beta$$

$$\alpha + \beta = 180 \Rightarrow 3\beta = 180 \Rightarrow \beta = 60^o \quad \alpha = 120^o$$

$$rs = 27 \quad s^3 = 27 \quad s = 3 \quad r = 9$$

$$r = s^2$$

$$z = 9_{120} = 9(\cos 120 + isen120) = 9(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i$$

$$w = 3_{60} = 3(\cos 60 + isen60) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

EJERCICIO 8 Demuestra, sin utilizar la calculadora, que sen105˚ + sen15˚ = $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$sen(a+b) = sena\cos b + \cos a senb$$
$$sen(a-b) = sena\cos b - \cos a senb$$
$$sen(a+b) + sen(a-b) = 2sena\cos b$$

$$\begin{array}{l} a+b = 105 \\ a-b = 15 \end{array} \quad 2a = 120 \quad a = 60^o \quad b = 45^o$$

$$sen105^o + sen15^o = 2sen60^o\cos 45^o = 2 \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

EJERCICIO 9 Halla un complejo w, expresado en forma binómica, tal que:

$$\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right)^{20}}{\mathbf{w}} = \mathbf{1+i}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = 1_{135^o};\ (1_{135^o})^{20} = 1_{2700} = 1_{180^o}$$

$$1+i = \sqrt{2}_{45^o} \Rightarrow w = \frac{1_{180^o}}{\sqrt{2}_{45^o}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{135^o} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 135 + isen135) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$