EXAMEN VECTORES

Instrucciones para el examen:

- Expresa los resultados con fracciones y radicales siempre que sea posible. En caso de usar decimales, redondea a la centésima.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de las propiedades que se están aplicando. Tan importante como los resultados es el proceso, explícalo claramente.
- Puedes hacer las preguntas en el orden que quieras pero sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuidadoso/a con la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. **(2 puntos)** Dado el vector $\vec{u}(2, -\frac{3}{5})$:

1'5

a) (0,5 p) Calcula el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\vec{u}$ cuyo origen es $A(-1, 5)$.

b) (0,5 p) Determina si el vector $\vec{v}(-10, 3)$ y $\vec{u}$ son linealmente dependientes

c) (0,5 p) Determina si $\vec{w}(\frac{3}{2}, 5)$ es ortogonal a $\vec{u}$.

d) (0,5 p) ¿Es posible que exista un vector $\vec{n}$ tal que el producto escalar con $\vec{u}$ sea 3 y formen entre sí un ángulo de 120º?

a) $B(x,y) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (x+1, y-5) = (2, -\frac{3}{5}) = \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \rightarrow x = 1 \\ y-5 = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{-3+25}{5} \end{cases}$

$y = \frac{22}{5}$

$\Rightarrow B(1, 22/5)$

b) $\vec{u} = (2, -\frac{3}{5})$ y $\vec{v}(-10, 3)$ son linealmente dependientes si sus coordenadas son proporcionales:

$\frac{2}{-10} = \frac{-3/5}{3} \Rightarrow -\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$ ✓ Sí son lin. dependientes

c) $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$(2, -\frac{3}{5}) \cdot (\frac{3}{2}, 5) = 2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{-3}{5} \cdot 5 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$

d) No, no es posible. El producto escalar debería ser negativo:

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \underset{\underset{0}{\vee\!/}}{|\vec{n}|} \cdot \underset{\underset{0}{\vee\!/}}{|\vec{u}|} \underbrace{\cos 120^\circ}_{\underset{\underset{0}{\wedge}}{-1/2}} < 0$ ¡No puede ser $3 > 0$!

2. **(2 puntos)** Dadas las rectas $r: -2x+4y-12=0$, $s: 3x-6y+18=0$

a) (1 p) Determina su posición relativa y calcula, en el caso de que los haya, los correspondientes puntos comunes.

b) (1 p) Determina el vector director y las ecuaciones paramétricas de la recta (t) que pasa por el punto punto $A(-3{,}4)$ y es paralela a la recta (s).

a) Para estudiar la posición relativa comparamos los coeficientes de las dos rectas:

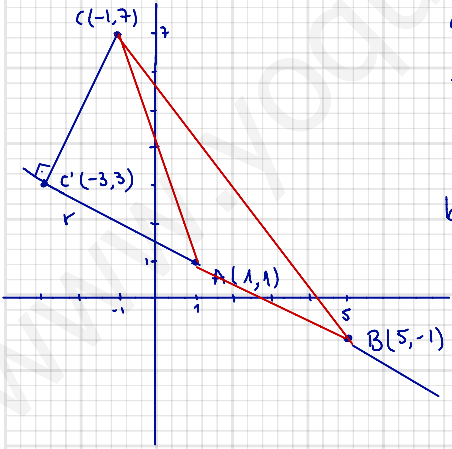
$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} = \frac{-12}{18} \Rightarrow$ Son todos proporcionales $\Rightarrow$ r y s son $\Rightarrow$ coincidentes

$\Rightarrow$ Todos sus puntos son comunes

b) $t \parallel s \Rightarrow \vec{v_t} = \vec{v_s} = (6,3) \parallel (2,1) \rightarrow t: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 4+t \end{cases}$

3. **(3 puntos)** Dado el triángulo de vértices $A(1,1), B(5,-1)$ y $C(-1,7)$, calcula:

a) (0,5 p) La ecuación punto pendiente de la recta que pasa por A y B.
b) (1 p) La ecuación general de la mediatriz del segmento AB.
c) (1 p) La proyección ortogonal de C respecto de AB.
d) (0,5 p) El área del triángulo.



a) $r(A, \vec{v_r} = \vec{AB})$ $\vec{v_r} = (5-1, -1-1) = (4,-2)$

$\Rightarrow m = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{r: y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)} \rightarrow \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x + 2y - 3 = 0$

b) La mediatriz de $\overline{AB}$

1) Calculo $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (3,0)$

2) Calculamos $s(M, \vec{n_s} = \vec{AB}) \rightarrow$

$\rightarrow \vec{n_s} = (2,-1) \rightarrow s: 2x - y + c = 0 \xrightarrow{M \in s}$

$\rightarrow 2 \cdot 3 + c = 0 \rightarrow c = -6$

$\boxed{s: 2x-y-6=0}$

c) Proy. ortogonal C' de C respecto de AB y, por tanto, respecto de r:

1) Calculemos $t \perp r$ que pasa por C $\rightarrow t: 2x - y + c = 0 \xrightarrow[C \in t]{} 2\cdot(-1) - 7 + c = 0$

$c = 9$

2) Calculemos $C' = t \cap r$

$$C' \begin{cases} r: x + 2y - 3 = 0 \\ t: 2x - y + 9 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{array}{r} -2x - 4y + 6 = 0 \\ 2x - y + 9 = 0 \\ \hline -5y + 15 = 0 \end{array} \rightarrow y = \frac{-15}{-5} = 3$$

De la 1ª $\rightarrow x = 3 - 2y = 3 - 2\cdot 3 = -3$

$C'(-3,3)$

d) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CC'}|}{2} = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10\,u^2$

$\overrightarrow{CC'} = (-3+1, 3-7) = (-2,-4) \rightarrow |\overrightarrow{CC'}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

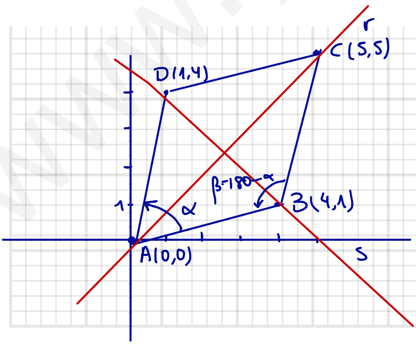
d*) Área $= \dfrac{b \cdot h}{2}$ $\quad b = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

$h = d(C, r) = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|-1 + 2\cdot 7 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

Área $= \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{\cancel{2}} = 10\,u^2$

4. **(3 puntos)** De un rombo **ABCD** conocemos las coordenadas de tres vértices: ***A*** es el origen de coordenadas , $\boldsymbol{B(4,1)}$ y $\boldsymbol{D(1,4)}$.

a) (0,5 p) Calcula las coordenadas del cuarto vértice, **C**.
b) (1 p) Calcula las ecuaciones continuas de las rectas (r) y (s) en las que se apoyan las diagonales.
c) (1 p) Demuestra analíticamente que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio.
d) (0,5 p) Calcular los ángulos del rombo.



a) $C(x,y) = B + \overrightarrow{AD} = (4,1) + (1,4) = (5,5)$

$\overrightarrow{AD} = (1-0, 4-0) = (1,4)$

b) $\vec{r}(A, \overrightarrow{AC})$ $\quad \vec{v_r} = \overrightarrow{AC} = (5-0, 5-0) = (5,5) /\!/ (1,1)$

$r: \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} \rightarrow r: x = y \rightarrow r: x - y = 0$

(Ec. general para después)

$s(B, \overrightarrow{BD})$ $\vec{v_s} = \overrightarrow{BD} = (1-4, 4-1) = (-3, 3) /\!/ (1, -1)$

$s: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \longrightarrow s: x-4 = 1-y \rightarrow s: x+y-5=0$ (Ec. general, para después)

c) r y s son perpendiculares porque sus vectores directores lo son:

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (1,1) \cdot (1,-1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow \vec{v_r} \perp \vec{v_s}$

Su punto de corte, para ser el punto medio, debería ser:

$M = \dfrac{A+D}{2} = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{B+D}{2}$

Para comprobarlo, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r: x-y=0 \rightarrow x=y \\ s: x+y-5=0 \longrightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} = y \end{array}\right\} \Rightarrow r \cap s = M = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$$

punto medio de AC y BD

d) Para calcular los ángulos, que son iguales dos a dos, usemos los vectores de los lados y la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{(1,4)\cdot(4,1)}{\sqrt{1^2+4^2}\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{1\cdot 4 + 4 \cdot 1}{\sqrt{17}\sqrt{17}} = \frac{8}{17} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{8}{17}\right) = 61'93^\circ$$

$\beta = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \beta = 118'07^\circ$