

- Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:
  - $y = \ln(\operatorname{tg} 2x)$  en  $x = \frac{\pi}{8}$ .
  - $y = \sqrt{\operatorname{sen} 5x}$  en  $x = \frac{\pi}{6}$ .
  - $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$  en  $x = 2$ .
  - $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$  en  $x = 0$ .
- Halla las tangentes a la curva  $y = \frac{2x}{x-1}$  paralelas a la recta  $2x + y = 0$ .
- Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:
  - $y = x \ln x$  ; b)  $y = x^2 e^x$  ; c)  $y = \operatorname{sen} 2x$
- Halla el punto de la gráfica de  $y = 2\sqrt{x}$  en el que la tangente forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje  $X$ . Escribe la ecuación de esa tangente.
- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$  en  $x = 3$ . ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de  $f$  que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.
- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$  en su punto de inflexión.
- Halla los puntos de la curva  $y = 3x^2 - 5x + 12$  en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.
- Halla los puntos de la curva  $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$  en los que la recta tangente a esta pase por el punto  $(0, -8)$ . Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.
- Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje  $X$ :
  - $y = \frac{x^3}{3(x-1)}$  ; b)  $y = \frac{x^2}{\ln x}$  ; c)  $y = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$
- Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
  - $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  ; b)  $y = \frac{x^3(3x-8)}{12}$  ; c)  $y = x^4 - 2x^3$  ; d)  $y = x^4 + 2x^2$  ; e)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  ; f)  $y = e^x(x-1)$
- Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:
  - $y = \frac{8-3x}{x(x-2)}$  ; b)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$  ; c)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  ; d)  $y = \frac{2x^2 - 3x}{2-x}$  ; e)  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  ; f)  $y = \frac{8}{x^2(x-3)}$
- Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
  - $y = x^3 - 3x + 4$  ; b)  $y = x^4 - 6x^2$  ; c)  $y = (x-2)^4$  ; d)  $y = xe^x$  ; e)  $y = \frac{2-x}{x+1}$  ; f)  $y = \ln(x+1)$
- Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa  $x = 1$ :
  - $y = 1 + (x-1)^3$  ; b)  $y = 2 + (x-1)^4$  ; c)  $y = 3 - (x-1)^6$  ; d)  $y = -3 + 2(x-1)^5$
- Determina los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:
  - $f(x) = x + \frac{4}{(x-1)^2}$  ; b)  $f(x) = x \ln x$  ; c)  $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$  ; d)  $f(x) = e^{-x^2}$
- Dadas las funciones  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  ;  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ , comprueba si son derivables en  $\mathbb{R}$  y determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

16. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = x|x|$ . ¿Tiene máximos o mínimos? Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?
17. Dada la función  $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$ , calcula  $a$  sabiendo que  $f(x)$  tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 3$ . ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?
18. De la función  $f(x) = ax^3 + bx$  sabemos que pasa por  $(1,1)$  y en ese punto tiene tangente paralela a la recta  $3x + y = 0$ . Halla  $a$  y  $b$ .
19. Halla una función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$  y un punto de inflexión en el punto  $P(1,2)$ .
20. Calcula los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la función  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ , sabiendo que la ecuación de la recta tangente a  $f$  en  $x = 0$  es  $y = x$ ; y que tiene un extremo relativo en el punto  $(-1,0)$ .
21. Halla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tenga un máximo relativo en el punto  $(0,4)$  y un mínimo relativo en el punto  $(2,0)$ .
22. Sea  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  un polinomio que cumple que  $f(1) = 0$ ,  $f'(0) = 2$  y tiene dos extremos relativos para  $x = 1$  y  $x = 2$ . Halla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .
23. Dada la función  $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$ , calcula los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en  $x = 1$  y otro en  $x = 1/2$ .
24. La curva  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  corta al eje de abscisas en  $x = -1$  y tiene un punto de inflexión en el punto  $(2,1)$ . Calcula  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
25. La función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  verifica que  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 0$  y que  $f$  no tiene extremo relativo en  $x = 1$ . Calcula  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
26. Sea  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ . Halla  $a$  y  $b$  para que la curva  $y = f(x)$  tenga en  $x = 1$  un punto de inflexión con tangente horizontal.
27. Halla el valor de  $c$  de modo que la función  $y = \frac{e^x}{x^2 + c}$  tenga un único punto crítico. ¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?
28. Calcula los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que sea derivable la función  $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \\ x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$   
Halla sus extremos relativos en el caso  $a = -2$ ,  $b = 1$ .
29. Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
30. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $x^2 - y^2 + 2x - 6 = 0$  en los puntos de ordenada  $y = 3$ .
31. Determina los puntos de la circunferencia  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$  en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
32. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \arctg \frac{x-1}{x+1}$  que es paralela a la recta  $x - 2y + 3 = 0$ .
33. Halla la ecuación de la tangente a la curva  $y = x^{x/2}$  en el punto de abscisa  $x = e$ .
34. Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función  $y = |x^2 + 2x - 3|$ .

35. Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función  $y = |x^2 - 4|$ .
36. La curva  $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  corta al eje de abscisas en  $x = 1$  y tiene un punto de inflexión en  $(3, 2)$ . Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje  $X$ .
37. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones  $f(x) = 2x - x^2$  y  $g(x) = x^2 - x - 2$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .
38. Dada la función  $f(x) = |x - 3|(x + 1)$ , halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta  $y = 6x - 2$ .
39. Dada la función  $f(x) = 4 - x^2$ , se pide:
- El punto de esa curva en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos  $(-1, 3)$  y  $(2, 0)$ .
  - Las rectas que pasan por el punto  $(-2, 1)$  y son tangentes a la curva.
40. Halla el valor que debe tener  $a > 0$  para que la función  $f(x) = x^2 \ln \frac{x}{a}$  tenga un punto singular en  $x = e$ .
41. Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Determina  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que sea continua, tenga un máximo en  $x = -1$  y la tangente en  $x = -2$  sea paralela a la recta  $y = 2x$ .
42. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$ , calcula los valores de  $m$ ,  $n$  y  $p$  para que  $f$  sea derivable en  $\mathbb{R}$  y tenga un extremo relativo en  $x = -\frac{1}{2}$ . ¿Se trata de un máximo o de un mínimo? ¿Existen otros puntos críticos o singulares?
43. Sea la función  $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Determina el valor de  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f(x)$  es derivable en  $x = 0$ . ¿Tiene puntos singulares?
44. Halla los puntos de la parábola  $y = x^2 - 1$  que se encuentran a distancia mínima del punto  $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ .
45. El nivel medio diario de  $\text{CO}_2$  de una ciudad depende del número de habitantes,  $p$ , y viene dado por la función  $C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$ , con  $p$  en miles y  $C$  en partes por millón (ppm). Si la evolución de la población de esa ciudad en  $t$  años es  $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$ , en miles de habitantes, ¿con qué rapidez estará variando la concentración de  $\text{CO}_2$  en ese lugar dentro de tres años?
46. La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función  $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$  con  $t \geq 0$ . ¿En qué instante del intervalo  $[0, 3]$  se alcanza la velocidad máxima? Calcula  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$  e interpreta el resultado.
47. En un experimento, la cantidad de agua en función del tiempo viene dada por la expresión
- $$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$$
- con  $t \in [1, 10]$ ,  $t$  en horas y  $C(t)$  en litros. Halla cuál es la cantidad mínima de agua y en qué instante de tiempo se obtiene.

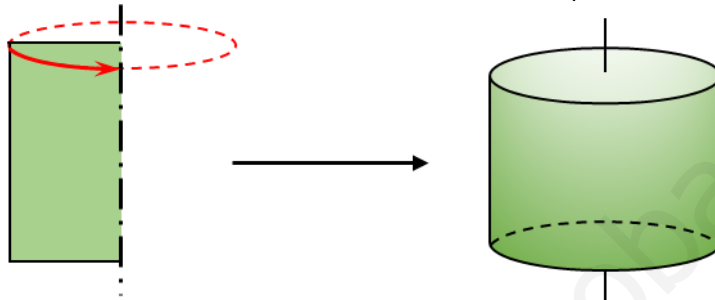
48. Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x^2 + |x - 2|$  ; b)  $f(x) = 3e^{-2|x|}$

49. Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo  $[-2, 3]$  de la función  $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (x - 3)$ .

50. Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base? **Nota:** el volumen del cono es  $(1/3)\pi r^2 h$  donde  $r$  es el radio de la base del cono y  $h$  su altura.

51. Halla los lados de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al girar alrededor de un lado vertical genere un cilindro de volumen máximo. **Nota:** el volumen del cilindro es  $\pi r^2 h$  ( $r$  radio de la base y  $h$  altura).



52. Sean  $x$  e  $y$  dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede  $x + y$  ser menor que 7? Razona la respuesta.

53. El radio de un círculo crece uniformemente con una velocidad de 2 cm/s. Halla la velocidad de crecimiento de su superficie cuando el radio sea 5 cm.

54. Siendo  $h(x)$  la suma de las coordenadas del punto  $P(x, f(x))$  de la gráfica de  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ , calcula los extremos relativos de  $h(x)$ . ¿Tiene  $h(x)$  algún extremo absoluto?

55. El punto  $P(x, y)$  recorre la elipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Deduce las posiciones del punto  $P$  para que su distancia al punto  $(0, 0)$  es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

56. Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo. Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por  $A(x) = 12 \sin x$ , donde  $x$  es el ángulo que forman las manecillas. Halla  $x$  para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.

57. En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es  $50 \text{ cm}^2$ . ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?

58. Dada  $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ , determinar cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  tienen la máxima pendiente.

59. En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales. Expresar el área  $A$  del rectángulo en función de su base,  $x$ , y di cuál es el dominio de la función. Halla el valor máximo de esa función.

60. Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad  $80 \text{ cm}^3$ . Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que precio sea el menor posible.

61. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m. Encuentra un punto  $P$  sobre la altura tal que la suma de distancias de  $P$  a los tres vértices sea mínima.

62. De todas las rectas que pasan por el punto  $(1, 2)$ , encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área máxima.

63. En una circunferencia de radio  $r$  se traza la tangente en un punto cualquiera  $C$  y una cuerda  $AB$  paralela a dicha tangente. Demuestra que, para que el área del triángulo  $ABC$  sea máxima, la distancia de  $C$  a la cuerda deber ser  $3/2$  del radio.

64. Comprueba que  $f(x) = x^3 - 18x$ , definida en el intervalo  $[0, 3\sqrt{2}]$ , verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor  $c \in (0, 3\sqrt{2})$  para que  $f'(c) = 0$ .
65. La función  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ , ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[0, 4]$ ? En caso afirmativo, di cuál es el punto  $x_0$  que cumple la tesis.
66. Se tiene la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$ . Prueba que  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en  $[-2, 0]$  y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.
67. ¿Es posible calcular  $a, b, c$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  cumpla el teorema de Rolle en el intervalo  $[0, c]$ ?
68. La función  $f(x) = |\cos x|$  toma en los extremos del intervalo  $[0, \pi]$  el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?
69. Sea  $f$  una función continua y derivable tal que  $f(0) = 3$ . Calcula cuánto tiene que valer  $f(5)$  para asegurar que en  $[0, 5]$  existe un  $c$  tal que  $f'(c) = 8$ .
70. Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$  cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[2, 6]$ . ¿Dónde cumple la tesis?
71. Sea  $f(x) = 1 - x^{2/3}$ . Prueba que  $f(1) = f(-1) = 0$ , pero que  $f(x)$  no es nunca cero en el intervalo  $[-1, 1]$ . Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.
72. La derivada de una función  $f$  es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos,  $a$  y  $b$ , tales que  $f(a) = f(b)$ ? Razónalo.
73. Calcula  $a, b$  y  $c$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[0, 4]$ . ¿En qué punto se cumple la tesis?
74. Dada la función  $f(x) = \sqrt{\ln(3^x + x) + \ln(x^2 - 10x + 20)}$ , demuestra que existe un valor  $a \in (1, 2)$  tal que  $f'(a) = 0$ . Menciona y justifica los resultados teóricos empleados.
75. Razona adecuadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
- Una función que no sea una recta puede tener infinitos puntos en los que su recta tangente sea  $y = 1$ .
  - Si  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) = 0$ , entonces  $f$  no puede tener ni máximo ni mínimo en  $x = a$ .
  - Si un polinomio de grado 3 tiene un mínimo en  $x = 2$ , ese mínimo no puede ser mínimo absoluto.
  - Una función continua en  $[0, 5]$ , que no es derivable en  $x = 3$ , no puede tener un máximo en  $x = 3$ .
  - Si  $y = f(x)$  es creciente en  $x = a$ , entonces  $y = -f(x)$  es decreciente en  $x = a$ .
  - Si  $f'(a) = 0$ ,  $f$  tiene un máximo o un mínimo en  $x = a$ .
  - Si  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) = 0$  y  $f'''(a) = -5$ ,  $f$  tiene un punto de inflexión en  $x = a$ .

## Soluciones

---

- a)  $y = 4x - \frac{\pi}{2}$  ; b)  $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\sqrt{6}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  ; c) Hay dos soluciones:  $y = -x + 7$ ,  $y = x + 1$  ; d)  $y = 1$ .
- $y = -2x$ ,  $y = -2x + 8$ .
- a)  $y = -\frac{1}{e}$  ; b)  $y = 0$ ,  $y = \frac{4}{e^2}$  ; c)  $y = -1$ ,  $y = 1$ .
- El punto de la gráfica de  $y = 2\sqrt{x}$  en el que la tangente forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje  $X$  es el  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .  
La ecuación de esa recta tangente es  $y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- $y = 11x - 25$ . Hay otra recta tangente a la gráfica de  $f$  que es paralela a la anterior, en concreto en el punto  $(-1, -4)$ . Esta recta tangente tiene por ecuación  $y = 11x + 7$ .
- $y = -\frac{1}{3}x - \frac{539}{54}$ .
- Los puntos de la curva  $y = 3x^2 - 5x + 12$  en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas son  $(2, 14)$  y  $(-2, 34)$ . La recta tangente al primero es  $y = 7x$ . La recta tangente al segundo es  $y = -17x$ .
- Los puntos de la curva  $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$  en los que la recta tangente a esta pase por el punto  $(0, -8)$  son  $(4, 16)$  y  $(-4, -16)$ . Las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos son, respectivamente,  $y = 6x - 8$  y  $y = 2x - 8$ .
- a)  $y = 0$ ,  $y = \frac{9}{4}$  ; b)  $y = 0$ ,  $y = 2e$  ; c)  $y = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$ ,  $y = e^{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{2})$
- a) Hay un mínimo en  $(3, 0)$ , un máximo en  $(1, 4)$  y un punto de inflexión en  $(2, 2)$ .  
b) Hay un mínimo en  $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$  y dos puntos de inflexión: uno en  $(0, 0)$  y otro en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{64}{81}\right)$ .  
c) Hay un mínimo en  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$  y dos puntos de inflexión: uno en  $(0, 0)$  y otro en  $(1, -1)$ .  
d) Solamente hay un mínimo en el punto  $(0, 0)$ . No hay ni máximos ni puntos de inflexión.  
e) Hay un máximo en  $(0, 1)$  y dos puntos de inflexión: uno en  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$  y otro en  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ .  
f) Hay un mínimo en  $(0, -1)$  y un punto de inflexión en  $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$ .
- a) Es creciente en  $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$  y decreciente en  $\left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$ . Tiene un máximo en el punto  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right)$  y un mínimo en el punto  $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ .  
b) Es creciente en  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  y decreciente en  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ . Tiene un máximo en el punto  $(0, -1)$

- c) Es creciente en  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  y decreciente en  $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ . Tiene un máximo en el punto  $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  y un mínimo en el punto  $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .
- d) Es creciente en  $(1, 2) \cup (2, 3)$  y decreciente en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ . Tiene un máximo en el punto  $(3, -9)$  y un mínimo en el punto  $(1, -1)$ .
- e) La función es creciente en todo su dominio. Por tanto, no tiene ni máximos ni mínimos.
- f) Es creciente en  $(0, 2)$  y decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$ . Tiene un máximo en el punto  $(2, -2)$ .
12. a) Es convexa en  $(-\infty, 0)$  y cóncava en  $(0, +\infty)$ . Tiene un punto de inflexión en  $(0, 4)$ .
- b) Es convexa en  $(-1, 1)$  y cóncava en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Tiene dos puntos de inflexión:  $(-1, -5)$  y  $(1, -5)$ .
- c) La función es cóncava en todo  $\mathbb{R}$ . Por tanto, no tiene puntos de inflexión.
- d) Es convexa en  $(-\infty, -2)$  y cóncava en  $(-2, +\infty)$ . Tiene un punto de inflexión en  $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ .
- e) Es convexa en  $(-\infty, -1)$  y cóncava en  $(-1, +\infty)$ . No tiene puntos de inflexión.
- f) Es convexa en todo su dominio, que es el intervalo  $(-1, +\infty)$ . No tiene puntos de inflexión.
13. a) No tiene ni máximos ni mínimos. Hay un punto de inflexión en  $(1, 1)$ .
- b) Hay un mínimo en el punto  $(1, 2)$ . No hay máximos ni puntos de inflexión.
- c) Hay un máximo en el punto  $(1, 3)$ . No hay mínimos ni puntos de inflexión.
- d) No tiene ni máximos ni mínimos. Hay un punto de inflexión en  $(1, -3)$ .
14. a) Hay un mínimo en el punto  $(3, 4)$ . No tiene máximos.
- b) Hay un mínimo en el punto  $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ . No tiene máximos.
- c) Dado  $k \in \mathbb{Z}$ , los máximos son los puntos  $\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2}\right)$ , y los mínimos son los puntos  $\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$ .
- d) Hay un máximo en el punto  $(0, 1)$ . No tiene mínimos.
15. a) Es derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Es decreciente en  $(-\infty, -1)$  y creciente en  $(-1, +\infty)$ . Tiene un mínimo en el punto  $(-1, -2)$ .
- b) Es derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Es decreciente en  $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$  y creciente en  $\left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$ . Tiene un mínimo en el punto  $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{65}{4}\right)$ .
16. La función es creciente en todo  $\mathbb{R}$ . Por tanto, no tiene ni máximos ni mínimos. Es convexa en  $(-\infty, 0)$  y cóncava en  $(0, +\infty)$ . Tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .
17. Para  $a = -4$  la función tiene un mínimo en el punto  $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ .
18.  $a = -2, b = 3$ .

19.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .
20. La única solución factible según las condiciones es  $a=3$ ,  $b=3$ ,  $c=1$ , valores para los que la función sería  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$ . Pero se da el caso de que en el punto  $(-1,0)$  esta función no tiene un extremo relativo, sino un punto de inflexión (¡compruébese!). Luego, en realidad, no habría solución posible.
21.  $a=1$ ,  $b=-3$ ,  $c=0$ ,  $d=4$ .
22.  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -\frac{3}{2}$ ,  $c = 2$ ,  $d = -\frac{5}{6}$ .
23.  $a=-1$ ,  $b=1$ .
24.  $a=-6$ ,  $b = \frac{10}{3}$ ,  $c = \frac{31}{3}$ .
25.  $a=-3$ ,  $b=3$ ,  $c=0$ .
26.  $a=-3$ ,  $b=3$ .
27. Para que la función tenga un único punto crítico, ha de ser  $c=1$ . En este caso el punto crítico es un punto de inflexión, en concreto se trata del punto  $\left(1, \frac{e}{2}\right)$ . En realidad, para este valor de  $c$  la función tiene un punto crítico más: otro punto de inflexión en  $(-0,1795, 0,8097)$ .
28. Para que la función sea derivable han de ser  $a=-2$  y  $b=1$ . Además, para estos valores, la función tiene un mínimo en el punto  $(1,0)$ .
29.  $\text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . La función es creciente en  $(1, +\infty)$  y decreciente en  $(-\infty, -1)$ .
30. Hay dos puntos de ordenada 3:  $(3,3)$  y  $(-5,3)$ . En estos puntos las rectas tangentes son, respectivamente,  $y = \frac{4}{3}x - 1$ ,  $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$ .
31. Los puntos de la circunferencia  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$  en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante son  $(3-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$  y  $(3+2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ .
32.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .
33.  $y - e^{e/2} = e^{e/2}(x - e)$ .
34. Es creciente en  $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$  y decreciente en  $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$ . Tiene un máximo en el punto  $(-1, 4)$  y dos mínimos en los puntos  $(-3, 0)$  y  $(1, 0)$ .
35. Tiene un máximo relativo en el punto  $(0, 4)$  (no tiene máximos absolutos). Y tiene dos mínimos relativos que también son absolutos en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .
36. Los puntos de la curva que tienen recta tangente paralela al eje  $X$  son  $(4, 0)$  y  $(2, 4)$ .
37. El ángulo que forman las rectas tangentes es de  $45^\circ$ .
38. Los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta  $y = 6x - 2$  son  $(-2, -5)$  y  $(4, 5)$ .
39. a) El punto es  $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ; b) Las rectas que se piden son:  $y = 6x + 13$ ,  $y = 2x + 5$ .
40.  $a = e^{3/2}$ .
41.  $a=-1$ ,  $b=-2$ ,  $c=0$ .



42.  $m = -5$ ,  $n = 2$ ,  $p = -1$ . El punto  $x = -\frac{1}{2}$  se trata de un máximo. En concreto es el punto  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ . Hay otro punto crítico o singular: el punto  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right)$ , que se trata de un mínimo.
43.  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Si se iguala la primera o la segunda derivada a cero las correspondientes ecuaciones o bien no tienen solución o bien las soluciones no son válidas porque no pertenecen al intervalo de definición. El único punto crítico es  $x = 0$ , que es donde la función "pasa de ser una cosa a ser otra". Este es un punto singular pues en él la función pasa de ser cóncava a ser convexa, luego es un punto de inflexión, en concreto se trata del punto  $(0, 2)$ .
44. La mínima distancia se alcanza en el punto  $(-1, 0)$ .
45. La rapidez con que estará variando la concentración de  $\text{CO}_2$  en ese lugar dentro de 3 años es de 0,24 ppm, es decir, resulta un crecimiento de  $\text{CO}_2$  de 0,24 partes por millón a los 3 años.
46. La velocidad máxima de la partícula se alcanza cuando  $t = \sqrt{2}$  s.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ . Esto quiere decir que a partir del instante  $t = \sqrt{2}$  s, la velocidad de la partícula comienza a disminuir tendiendo a pararse cuando el tiempo aumenta. Se puede interpretar como que la partícula va desintegrándose con el tiempo.
47. La cantidad mínima se alcanza a las 3 horas y es aproximadamente de 42,89 litros.
48. a) Es decreciente en  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  y creciente en  $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ . Tiene un mínimo en el punto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ . La función es cóncava en todo  $\mathbb{R}$ .
- b) Es creciente en  $(-\infty, 0)$  y decreciente en  $(0, +\infty)$ . Tiene un máximo en el punto  $(0, 3)$ . La función es cóncava en  $(-\infty, 0)$  y convexa en  $(0, +\infty)$ .
49. Máximo absoluto:  $(3, \ln 10)$ . Mínimo absoluto:  $(-2, \ln 5 - 5)$ .
50. El radio de la base debe ser  $r = \sqrt{\frac{200}{3}} \cong 8,16$  cm.
51. Los lados de la cartulina han de medir 20 cm y 10 cm.
52. No es posible que  $x + y$  sea menor que 7. La razón estriba en que el mínimo de la función  $f(x) = x + \frac{16}{x}$  es el punto  $(4, 8)$ .
53. La velocidad de crecimiento de la superficie cuando el radio es de 5 cm es de  $20\pi \cong 62,83$  cm<sup>2</sup>/s.
54. Hay solamente un extremo relativo, que es un mínimo relativo: el punto  $(0, 1)$ . Además, este punto es también un mínimo absoluto.
55. La distancia máxima al origen de coordenadas se alcanza en los puntos  $(-5, 0)$  y  $(5, 0)$ , y la distancia mínima se alcanza en los puntos  $(0, -3)$  y  $(0, 3)$ .
56. Para que el área del triángulo sea máxima las manecillas deben formar un ángulo de  $90^\circ$ , es decir, las manecillas deben estar en posición perpendicular la una de la otra. En este caso, el área del triángulo será de 12 cm<sup>2</sup>.
57. El radio del cilindro para que su volumen sea máximo debe ser igual a 5 cm.
58. La recta tangente a la gráfica de  $f$  con pendiente máxima se consigue en el punto de abscisa  $x = 2$ . En este caso la recta tangente es  $y - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}(x - 2)$ .

59. El área del rectángulo en función de su base es  $A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$ . Su dominio es  $(0, 12)$ . El máximo de la función  $A(x)$  se alcanza en  $x = 6$ , que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de  $30 \text{ cm}^2$  (que es el área máxima).
60. El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.
61. El punto buscado, situado sobre la altura, se encuentra a  $2\sqrt{3}$  m de la base.
62. La recta que se pide es  $y = -2x + 4$ .
63. Se trata de una demostración. Dar aquí la solución sería hacer el ejercicio en su totalidad. Sin embargo, daremos una pista: la altura del triángulo ha de ser mayor que el radio pues, de ser menor, se puede conseguir otro triángulo con la misma base y mayor altura, con lo que el área de este último sería mayor. Ahora hay que hacer un dibujo y lanzarse a la aventura.
64. Es fácil comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle:  $f$  es continua en  $[0, 3\sqrt{2}]$  y derivable en  $(0, 3\sqrt{2})$ . Además,  $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 54\sqrt{2}$ . En este caso  $c = \sqrt{6}$ .
65. Sí que se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio:  $f$  es continua en  $[0, 4]$  y derivable en  $(0, 4)$ . Hay dos puntos  $x_0$  en los que se cumple la tesis:  $x_0 = \frac{5 + \sqrt{13}}{3}$  y  $x_0 = \frac{5 - \sqrt{13}}{3}$ .
66. Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio:  $f$  es continua en  $[-2, 0]$  y derivable en  $(-2, 0)$ . Los puntos en los que se cumple la tesis son  $c_1 = -\sqrt{2}$  y  $c_2 = -\frac{1}{2}$ .
67. Para que  $f$  sea continua y derivable tiene que ser  $a = 2$  y  $b = 1$ , pero no existe ningún  $c$  tal que  $f(x)$  cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en  $[0, c]$ .
68. No cumple el teorema de Rolle porque  $f$  no es derivable en el intervalo  $(0, \pi)$ .
69.  $f(5) = 43$ .
70.  $a = 2$ ,  $b = 19$ . La tesis se cumple en el punto  $c = \frac{9}{2}$ .
71. No se contradice el teorema de Rolle porque  $f(x)$  no es derivable en el intervalo  $(-1, 1)$ . De hecho, no existe la derivada en el punto  $x = 0$ .
72. No es posible. Se puede razonar haciendo uso del teorema de Rolle.
73.  $a = -3$ ,  $b = 5$  y  $c = 1$ . La tesis se cumple en el punto  $x = \frac{3}{2}$ .
74. Hay que hacer uso adecuadamente del teorema de Rolle.
75. a) Verdadero ; b) Falso ; c) Verdadero ; d) Falso ; e) Verdadero ; f) Falso ; g) Verdadero