**1) Determinar los valores de a y b para quien la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:**

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases} \boldsymbol{x^2+ax} & \boldsymbol{si\ x \le -1} \\ \boldsymbol{\frac{x^2+2ax+1}{x-1}} & \boldsymbol{si -1 < x < 0} \\ \boldsymbol{\sqrt{x+4}} & \boldsymbol{si\ x \ge 0} \end{cases}$$

- Continuidad

- En x≠-1 y x≠0 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- En x=-1

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} bx^2+ax = b-a \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2ax+1}{x-1} = \frac{2-2a}{-2} = -1+a \\ f(-1) = b-a \end{cases}$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Por lo tanto b-a= -1+a → 2a-b = 1

- En x=0

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2ax+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$ → La función no es continua en x=0 ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

- Derivabilidad

- Si x≠ -1 y x≠0 → $f(x)$ es derivable, y su derivada es →

$$\text{f´(x)}=\begin{cases} 2bx+a & x<-1 \\ \frac{(2x+2a)\cdot(x-1)-1\cdot(x^2+2ax+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2a-1}{(x-1)^2} & -1<x<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} & x>0 \end{cases}$$

- En x=0 no es derivable ya que no es continua, cualesquiera que sean a y b.

- Si x=-1

Para que $f(x)$ sea derivable en $x$=-1, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(-1^-) = f(-1^+)$

$$\left.\begin{array}{r} f(-1^-) = -2b + a \\ f(-1^+) = \frac{1+2-2a-1}{4} = \frac{2-2a}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \text{-2b+a} = \frac{2-2a}{4} \rightarrow \text{-8b+4a=2-2a} \rightarrow \text{6a-8b=2}$$

Por tanto, f(x) será derivable en $\mathbb{R}$ - $\{0\}$ cuando y solo cuando: $\left.\begin{array}{r} 2a - b = 1 \\ 6a - 8b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{array}$

**2) Dada la función (Junio 2010)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-7x}{3} + 5 & \text{si} -3 < x \le 1 \\ -x^2 + ax + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \dfrac{bx - 15}{x - 1} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}$$

**a) Determinar los valores de *a* y *b* para los que se obtiene una función continua en todo su dominio.**

**b) ¿En qué puntos de su dominio la función obtenida en el apartado anterior es derivable?**

a) La función dada está definida en todo **R**; y cada una de las tres funciones que la determinan es continua y derivable en todo su dominio: las dos primeras son de tipo polinómico; la tercera es racional con una discontinuidad en $x = 1$, pero ese punto no está en su dominio de definición, que es el intervalo (3, 6).

Por tanto, la única dificultad para su continuidad y derivabilidad se da en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Para que la función sea continua en esos puntos debe cumplirse que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{8}{3}$ y que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 3a - 5$ ; y para ello es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}\left(\frac{-7x}{3} + 5\right) = \frac{8}{3} \text{ y } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(-x^2 + ax + 4\right) = a + 3$$

Como los límites deben ser iguales: $\frac{8}{3} = a + 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

En $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-}\left(-x^2 - \frac{1}{3}x + 4\right) = -6 \text{ y } \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{bx - 15}{x - 1} = \frac{3b - 15}{2}$$

Como los límites deben ser iguales: $-6 = \frac{3b - 15}{2} \Rightarrow b = 1$.

Luego, la función continua es: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-7x}{3} + 5 & \text{si} -3 < x \le 1 \\ -x^2 - \dfrac{1}{3}x + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \dfrac{x - 15}{x - 1} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}$ .

b) Salvo en los puntos $x$ = 1 y $x$ = 3, su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-7}{3} & \text{si} -3<x<1 \\ -2x-\dfrac{1}{3} & \text{si}\, 1<x<3 \\ \dfrac{14}{(x-1)^2} & \text{si}\, 3<x<6 \end{cases}$$

La derivada de $f(x)=\dfrac{x-15}{x-1}$ es: $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-1)-(x-15)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{14}{(x-1)^2}$

Para que sea derivable en los puntos $x$ = 1 y $x$ = 3 deben coincidir las derivadas laterales.

En $x$ = 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{7}{3} \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-2x-\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x = 1.

En $x$ = 3:

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-2x-\frac{1}{3}\right)=-\frac{19}{3} \text{ y } \lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{14}{(x-1)^2}=\frac{7}{2}$$

Como las derivadas laterales no son iguales, la función no es derivable en $x$ = 1.

-

**3) Dada la función: f(x)=** $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + ax +} & \boldsymbol{si\ x < 1} \\ \boldsymbol{cx} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$ **calcula a,b y c para que la función sea derivable en x=1, sabiendo que f(0)=f(4)**

- Continuidad

En x≠1 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Para x=1

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b \\ \lim_{x\to1^+} cx = c \\ f(1) = c \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

Por lo tanto tendremos que **1+a+b =c**

- Derivabilidad

- Si x≠ 1 → $f(x)$ es derivable, y su derivada es →

f´(x)= $\begin{cases} 2x + a & si\ x < 1 \\ c & si\ x > 1 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x$=1, han de ser iguales las derivadas laterales → $f´(1^-) = f(1^+)$

$$\left.\begin{array}{r} f´(1^-) = 2 + a \\ f´(1^+) = c \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{2+a = c}$$

- Otra condición que nos da el problema es f(0)=f(4)

Pues calculamos el valor de la función para x=0 y x=4 . El valor de la función para x=0 debemos coger la función f(x)= $x^2 + ax + b$ ya que es donde está definida y para x=4 debemos coger la función f(x)=cx ya que es donde está definida.

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b \\ f(4) = 4c \end{array}\right\} \rightarrow f(0)=f(4) \rightarrow b=4c$$

Con las tres ecuaciones se plantea un sistema: $\begin{cases} 1 + a + b = c \\ 2 + a = c \\ b = 4c \end{cases}$

Se cumplen las condiciones del enunciado para la función f(x) si → $\begin{cases} a = \frac{-7}{4} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$

4) **Se sabe que la función f:[0,5] →ℝ dada por f(x) =** $\begin{cases} \boldsymbol{ax + \ \ x^2} & \boldsymbol{si\ 0 \le x < 2} \\ \boldsymbol{c + \sqrt{x-1}} & \boldsymbol{si\ 2 \le x \le 5} \end{cases}$ **es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0)=f(5). ¿Cuánto valen a,b y c?**

- En primer lugar, como f(0)=f(5)

$\left.\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ f(5) = c + \sqrt{5-1} = c+2 \end{array}\right\}$ → Como f(0)=f(5) → 0=c+2 → **c=-2**

- Continuidad

En x≠2 → f(x) es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Para x=2

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ \lim_{x\to 2^+} c + \sqrt{x-1} = c+1 \\ f(2) = c+1 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x= 2 se tiene que cumplir $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

Por lo tanto tendremos que **2a+4b= c+1 → 2a+4b=-2+1 → 2a + 4b=-1**

- **Derivabilidad**

- Si x≠ 1 → *f* (*x*) es derivable, y su derivada es →

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & si\ \ 2 < x < 5 \end{cases}$$

Para que *f* (*x*) sea derivable en *x*=2, han de ser iguales las derivadas laterales → $f'(2^-) = f(2^+)$

$\left.\begin{array}{c} f'(2^-) = a + 4b \\ f'(2^+) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ → Así pues, para que f sea derivable en x=2debe ser **a+4b=$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**

Con las ecuaciones obtenidas se plantea un sistema y se resuelve:

$\begin{cases} 2a + 4b = -1 \\ -2a - 8b = -1 \end{cases}$ → a= $\frac{-3}{2}$ y b= $\frac{1}{2}$

Para que la función f cumpla las condiciones de enunciado **a= $\boldsymbol{\frac{-3}{2}}$ y b= $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ y c=-2**

5) **Explica por qué no existe la derivada de f(x)=$|x^2-7x+12|$ en x=4**

Primero se define la función a trozos, estudiando qué valores de x anulan el valor absoluto y para qué valores es positiva y para cuáles negativa: g(x)= $\boldsymbol{x^2-7x+12}$ **,** se hace cero si x=3 o si x=4, es positiva si x<3 o si x>4 y es negativa si 3<x4

Así pues, la función es f(x)=$\begin{cases} \boldsymbol{x^2-7x+12} & \boldsymbol{si\ x<3} \\ \boldsymbol{-x^2+7x-12} & \boldsymbol{si\ 3\le x\le 4} \\ \boldsymbol{x^2-7x+12} & \boldsymbol{si\ x>4} \end{cases}$, que es continua en todo $\mathbb{R}$

- Continuidad

- x= 3

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 3^-} \boldsymbol{x^2-7x+12=0} \\ \boldsymbol{\lim_{x\to 3^+} -x^2+7x-12=0} \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \text{ la función es continua}$$

- x= 4

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 4^-} \boldsymbol{-x^2+7x-12=0} \\ \boldsymbol{\lim_{x\to 4^+} x^2-7x+12=0} \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \text{Como } \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4) \text{ la función es continua}$$

- Derivabilidad

- Si x≠ 3 y x≠4 → $f(x)$ es derivable, y su derivada es →

f´(x)= $\begin{cases} 2x-7 & si\ x<3 \\ -2x+7 & si\ 3<x<4 \\ 2x-7 & si\ x>4 \end{cases}$

x=3

Para que $f(x)$ sea derivable en $x$=3, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(3^-)=f(3^+)$

$\left.\begin{array}{l} f´(3^-)=-1 \\ f(3^+)=+1 \end{array}\right\}$ → Como f´$(3^-)\neq\ f(3^+)$ no es derivable

x=4

Para que $f(x)$ sea derivable en $x$=4, han de ser iguales las derivadas laterales → f´$(4^-)=f(4^+)$

$\left.\begin{array}{l} f´(4^-)=-1 \\ f(4^+)=+1 \end{array}\right\}$ → Como f´$(4^-)\neq\ f(4^+)$ no es derivable

La función no será derivable en x=3 y x=4