

1. (1.5p) Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right]$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 4}{(x - 3)^2}$

2. (1p) Calcula el valor de b para que la siguiente función sea continua en $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x + b}{x - 2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

3. (3p) Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando los resultados:

a. $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2}$

b. $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + 2x}$

c. $f(x) = \text{sen}(\cos 5^x)$

d. $f(x) = \text{sen}^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

e. $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

f. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{2x}$

4. (1p) Se considera la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 12x + 16$. Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

5. (1p) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a. (0.25p) $f(x) = \frac{2x - 6}{x - 2}$

b. (0.75p) $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 6}{x - 2}}$

6. (2.5p) Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3}{x}$$

a. (1p) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

b. (1p) Determinénense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c. (0.5p) Esboce la gráfica de $f(x)$.



IES GUADARÍ

Límites, continuidad, derivadas y funciones

1. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{6x^3+7x^2-1} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

Se factoriza el denominador:

-1	6	7	0	-1
		-6	-1	1
	6	1	-1	0

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{6x^3+7x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(6x^2+x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{6x^2+x-1} = \frac{1}{6-1-1} = \frac{1}{4}$$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando los resultados:

a. $f(x) = \sqrt{\ln(3x^2)}$

$$f'(x) = \frac{(\ln(3x^2))'}{2\sqrt{\ln(3x^2)}} = \frac{\frac{(3x^2)'}{3x^2}}{2\sqrt{\ln(3x^2)}} = \frac{\frac{6x}{3x^2}}{2\sqrt{\ln(3x^2)}} = \frac{\frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln(3x^2)}} = \frac{2}{2x\sqrt{\ln(3x^2)}} = \frac{1}{x\sqrt{\ln(3x^2)}}$$

b. $f(x) = \text{sen}(\text{sen } 5x)$

$$f'(x) = \cos(\text{sen } 5x) \cdot (\text{sen } 5x)'$$

$$f'(x) = \cos(\text{sen } 5x) \cdot \cos 5x \cdot (5x)'$$

$$f'(x) = \cos(\text{sen } 5x) \cdot \cos 5x \cdot 5$$

$$f'(x) = 5\cos(\text{sen } 5x) \cdot \cos 5x$$

c. $f(x) = (x^7 + 1) \cdot \log_3(3x^7 + 1)$ (No simplificar el resultado)

$$f'(x) = (x^7 + 1)' \cdot \log_3(3x^7 + 1) + (x^7 + 1) \cdot (\log_2(1 - x^2))' =$$

$$7x^6 \cdot \log_3(3x^7 + 1) + (x^7 + 1) \cdot \frac{(1 - x^2)'}{(1 - x^2) \cdot \ln 2} =$$

$$7x^6 \cdot \log_3(3x^7 + 1) + (x^7 + 1) \cdot \frac{-2x}{(1 - x^2) \cdot \ln 2}$$

d. $f(x) = 3 + 3^{x/5}$

$$f'(x) = (3)' + 3^{x/5} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{5}x\right)' = 0 + 3^{x/5} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3^{x/5} \cdot \ln 3}{5}$$

e. $f(x) = \cos^2(-2x)$

$$f'(x) = 2\cos(-2x) \cdot (\cos(-2x))' = 2\cos(-2x) \cdot (-\text{sen}(-2x)) \cdot (-2x)' =$$

$$-2\cos(-2x) \cdot \text{sen}(-2x) \cdot (-2) = 4\cos(-2x) \cdot \text{sen}(-2x)$$

f. $f(x) = \text{tg}(5x)$

$$f'(x) = \frac{(5x)'}{\cos^2(5x)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

3. Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{si } x \neq -3 \\ 3k - x & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

En $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x - 3) = -3 - 3 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$$

$$f(-3) = 2k + 3$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) \rightarrow -6 = 2k + 3 \rightarrow 2k = -9 \rightarrow k = -9/2$$

4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Se pide:

a. Asíntotas de $f(x)$, aproximando las verticales si las hay.

ASÍNTOTA VERTICAL:

$$x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} = \infty \rightarrow \nexists$$

ASÍNTOTA OBLÍCUA

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$y = mx + n \rightarrow y = -x - 2$$

b. Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} \quad (I)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4-x) = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4 - x = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

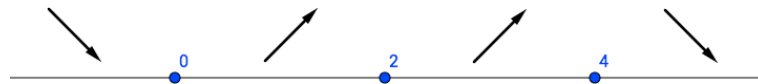
Sobre la recta real situamos los valores que han anulado la primera derivada (posibles máximos o mínimos) así como el valor que no pertenece al dominio de definición de la función ($x = 2$). Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función en cada uno de los intervalos sustituyendo un valor en la primera derivada (f'):

$$f'(-1) = \frac{4 \cdot (-1) - (-1)^2}{(3)^2} = \frac{-4 - 1}{9} < 0$$

$$f'(1) = \frac{4 \cdot 1 - 1^2}{(1)^2} = \frac{4 - 1}{1} > 0$$

$$f'(3) = \frac{4 \cdot 3 - 3^2}{(-1)^2} = \frac{12 - 9}{1} > 0$$

$$f'(5) = \frac{4 \cdot 5 - 5^2}{(-3)^2} = \frac{20 - 25}{9} < 0$$



Obtenemos la ordenada del máximo y mínimo relativo:

$$f(0) = \frac{0^2}{2 - 0} = 0$$

$$f(4) = \frac{4^2}{2 - 4} = \frac{16}{-2} = -8$$

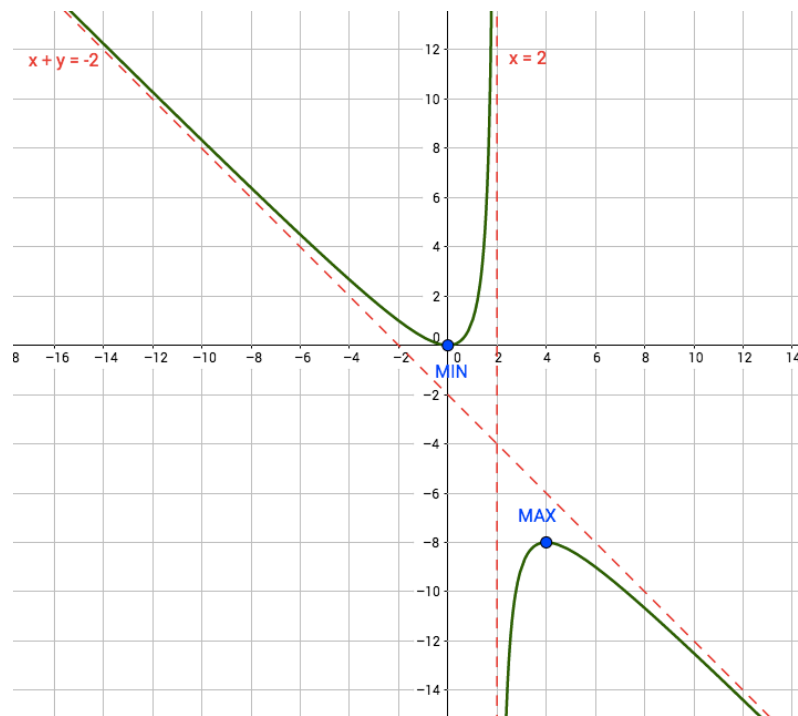
Creciente: $(0, 2) \cup (2, 4)$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Máximo relativo: $(4, -8)$

Mínimo relativo: $(0, 0)$

c. Esboza la gráfica.



5. Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x^3 - 2x$ en $x = -1$.

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$x_0 = -1$$

$$y_0 = f(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = -5 + 2 = -3$$

La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = 15x^2 - 2$, luego:

$$m = f'(-1) = 15 \cdot (-1)^2 - 2 = 15 - 2 = 13$$

Sustituyendo:

$$y + 3 = 13(x + 1) \rightarrow y + 3 = 13x + 13 \rightarrow 13x - y + 10 = 0$$