Números reales, álgebra

1. (1p) Resuelve la desigualdad con valor absoluto $|4-2x| \geq 6$

2. (2p) Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$

- **a. (1p)** Obtén las raíces y factoriza $P(x)$.
- **b. (1p)** Resuelve la inecuación $P(x) \leq 0$.

3. (1p) Racionaliza y simplifica el resultado todo lo posible:

$$\frac{\sqrt{15}-3}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

4. (1.5p) Simplifica:

$$\left[\frac{x^2}{x+3} \cdot \left(\frac{x+1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)\right] : \frac{1}{x^2-9}$$

5. (0.75p) Resuelve y simplifica, empleando las propiedades de las raíces $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt[4]{x^3}}$

6. (0.75p) Si $\log a = -2$ y $\log b = 3$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de $\log \sqrt{a \cdot b^3}$

7. (1.5p) Discute y resuelve empleando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

8. (1.5p) Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y < 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ y < 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1. Resuelve la desigualdad con valor absoluto $|4-2x| \geq 6$

Las soluciones de la ecuación $|4-2x| = 6$ son:

$$4-2x = 6 \quad \rightarrow \quad -2x = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

$$-(4-2x) = 6 \quad \rightarrow \quad -4+2x = 6 \quad \rightarrow \quad 2x = 10 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

Se representan los valores obtenidos sobre la recta real y se estudia el cumplimiento de la inecuación de cada uno de los intervalos:

$x = 0 \quad \rightarrow \quad |4-2\cdot 0| = 4$ No es mayor o igual que 6

$x = -2 \quad \rightarrow \quad |4-2\cdot(-2)| = 8$ Sí es mayor o igual que 6

$x = 6 \quad \rightarrow \quad |4-2\cdot 6| = 8$ Sí es mayor o igual que 6

Solución gráfica:

Solución como unión de semirrectas: $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

2. Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$

a. Obtén las raíces y factoriza $P(x)$.

Se buscan las raíces de $P(x)$ resolviendo la ecuación $x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 = 0$:

	1	-2	1	0	-4
-1		-1	3	-4	4
	1	-3	4	-4	0
2		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

Obtenemos las otras dos posibles raíces reales resolviendo la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \nexists$$

Raíces reales: $\{-1, 2\}$

Factorizado $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - x + 2)$

b. Resuelve la inecuación $P(x) \leq 0$.

Se representan las raíces obtenidas en el apartado anterior sobre la recta real y se comprueba el signo de cada uno de los intervalos, estudiando si se cumple o no lo inecuación:

$x = -2 \quad \rightarrow \quad P(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 4 = 16 + 16 + 4 - 4 = 32$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad P(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0^2 - 4 = -4 \leq 0$ (Sí se cumple)

$x = 3 \quad \rightarrow \quad P(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 4 = 81 - 54 + 9 - 4 = 32$

Solución gráfica:

Solución como intervalo: $[-1, 2]$

3. Racionaliza y simplifica el resultado todo lo posible:

$$\frac{\sqrt{15} - 3}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{15} - 3}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15} - 3)(2\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{45} + \sqrt{75} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$\frac{2\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{12 - 5} = \frac{6\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{7} = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{3}}{7}$$

4. Simplifica:

$$\left[\frac{x^2}{x+3}\cdot\left(\frac{x+1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\right]:\frac{1}{x^2-9}$$

$$\left[\frac{x^2}{x+3}\cdot\left(\frac{x+1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\right]:\frac{1}{x^2-9}=$$

$$\left[\frac{x^2}{x+3}\cdot\left(\frac{x+1-x}{x^3}\right)\right]:\frac{1}{x^2-9}=$$

$$\left[\frac{x^2}{x+3}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]:\frac{1}{x^2-9}=$$

$$\frac{x^2}{x^3(x+3)}:\frac{1}{x^2-9}=$$

$$\frac{1}{x(x+3)}:\frac{1}{(x-3)(x+3)}=$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=$$

$$\frac{x-3}{x}$$

5. Resuelve y simplifica, empleando las propiedades de las raíces $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\cdot\sqrt{\sqrt[4]{x^3}}$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\cdot\sqrt{\sqrt[4]{x^3}}=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[8]{x^3}=\sqrt[24]{x^{16}}\cdot\sqrt[24]{x^9}=\sqrt[24]{x^{25}}=\sqrt[24]{x^{24}\cdot x}=x\sqrt[24]{x}$$

6. Si $\log a=-2$ y $\log b=3$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de $\log\sqrt{a\cdot b^3}$

$$\log\sqrt{a\cdot b^3}=\log(a\cdot b^3)^{1/2}=\frac{1}{2}\log(a\cdot b^3)=\frac{1}{2}(\log a+\log b^3)=\frac{1}{2}(\log a+3\log b)=$$

$$\frac{1}{2}(-2+3\cdot 3)=\frac{7}{2}$$

7. Discute y resuelve empleando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x+2y+z=1\\ 5x+3y+3z=1\end{cases}$$

Tomando la incógnita “z” en E1, se anula en E2 y E3 resolviendo los sistemas $-3E1+E2$ y $-5E1+E3$:

$$\begin{array}{rrrcr} -3x & -3y & +3z & = & -3 \\ 3x & +2y & +z & = & 1 \\ \hline & -y & +4z & = & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} -5x & -5y & +5z & = & -5 \\ 5x & +3y & +3z & = & 1 \\ \hline & -2y & +8z & = & -4 \\ & -y & +4z & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 1 \\ \quad -y + 4z = 2 \\ \quad -y + 4z = 2 \end{cases}$$

Las ecuaciones E2 y E3 son iguales por lo que al tomar una incógnita, por ejemplo “y”, en E2 y anularla en E3, se obtiene como ecuación $0 = 0$:

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 1 \\ \quad -y + 4z = 2 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Se resuelve el sistema:

$z = \lambda$

$E2 \quad \rightarrow \quad -y + 4\lambda = -2 \quad \rightarrow \quad y = 4\lambda + 2$

$E1 \quad \rightarrow \quad x + 4\lambda + 2 - \lambda = 1 \quad \rightarrow \quad x = -1 - 3\lambda$

8. Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y < 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ y < 4 \end{cases}$$

$x - y = 3$

x	y
0	-3
3	0

Punto $(0, 0)$ $\rightarrow$ ¿$0 - 0 < 3$? $\rightarrow$ Sí verifica la inecuación

$2x + 3y = 6$

x	y
0	2
3	0

Punto $(0, 0)$ $\rightarrow$ ¿$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 6$? $\rightarrow$ No verifica la inecuación

$y = 4$

Recta horizontal de ordenada en el origen 4. El punto $(0, 0)$ no verifica la inecuación.