Evaluación 1

Unidad 1: Números reales

1. (0.75p) Dados $A = (-\infty, -6]$ y $B = (-10, -5)$, representa gráficamente y expresa en forma de intervalo y de desigualdad $A \cap B$.

2. (1p) Representa sobre la recta real y expresa en forma de intervalo o semirrecta $|4 - 2x| \geq 6$.

3. (1.5p) Simplifica las siguientes expresiones todo lo posible:

a. $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{81}{a^{18}}}}$ **b.** $\left(\sqrt[5]{r^2 s^4 t^6}\right)^3$

4. (3p) Resuelve las siguientes operaciones y simplifica:

a. $\sqrt{\dfrac{3}{16}} + \sqrt{\dfrac{27}{100}} - \sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ **c.** $\left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)^2$

5. (2p) Racionaliza y simplifica:

a. $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ **b.** $\dfrac{ab}{\sqrt[5]{a^3 b}}$

6. (0.75p) Calcula $\log_{1/3} \sqrt[3]{9}$

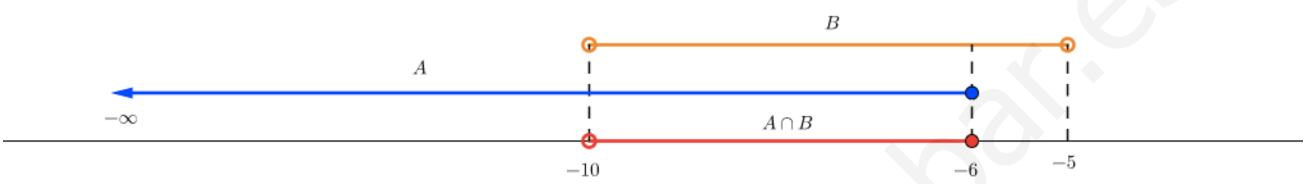
7. (1p) Si $\log A = -1$ y $\log B = 5$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de:

$$\log \frac{100 \cdot A^3}{\sqrt[4]{A \cdot B}}$$

SOLUCIÓN

1. Dados $A = (-\infty, -6]$ y $B = (-10, -5)$, representa gráficamente y expresa en forma de intervalo y de desigualdad $A \cap B$.

Gráficamente serán los valores comunes a ambos intervalos (solución en rojo):



Solución en forma de intervalo: $(-10, -6]$

Solución en forma de desigualdad: $-10 < x \leq -6$

2. Representa sobre la recta real y expresa en forma de intervalo o semirrecta $|4 - 2x| \geq 6$.

Las soluciones de la ecuación $|4 - 2x| = 6$ son:

$4 - 2x = 6 \;\rightarrow\; -2x = 2 \;\rightarrow\; x = -1$

$-(4 - 2x) = 6 \;\rightarrow\; -4 + 2x = 6 \;\rightarrow\; 2x = 10 \;\rightarrow\; x = 5$

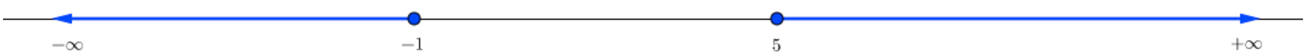
Se representan los valores obtenidos sobre la recta real y se estudia el signo de cada uno de los intervalos.

Para $x = 0 \;\rightarrow\; |4 - 2 \cdot 0| = 4$ No es mayor o igual que 6

Para $x = -2 \;\rightarrow\; |4 - 2 \cdot (-2)| = 8$ Sí es mayor o igual que 6

Para $x = 6 \;\rightarrow\; |4 - 2 \cdot 6| = 8$ Sí es mayor o igual que 6

Solución gráfica:



Solución como unión de semirrectas: $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

3. Simplifica las siguientes expresiones todo lo posible:

a. $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{81}{a^{18}}}} = \sqrt[6]{\frac{3^4}{a^6 \cdot a^6 \cdot a^6}} = \frac{1}{a^3}\sqrt[6]{3^4} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{a^3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{a^3}$

b. $\left(\sqrt[5]{r^2s^4t^6}\right)^3 = \sqrt[5]{r^6s^{12}t^{18}} = \sqrt[5]{r^5rs^5s^5s^2t^5t^5t^5t^3} = rs^2t^3\sqrt[5]{rs^2t^3}$

4. Resuelve las siguientes operaciones y simplifica:

a. $\sqrt{\frac{3}{16}} + \sqrt{\frac{27}{100}} - \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2^2 \cdot 2^2}} + \sqrt{\frac{3^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 5^2}} - \sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{10}\sqrt{3} - \sqrt{3} =$

$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10} - 1\right)\sqrt{3} = \left(\frac{5+6-20}{20}\right)\sqrt{3} = -\frac{9}{20}\sqrt{3}$

b. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6} \cdot \sqrt[12]{x^8} \cdot \sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^{23}} = \sqrt[12]{x^{12} \cdot x^{11}} = x\sqrt[12]{x^{11}}$

c. $\left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 4\sqrt{12} = 8 + 6 - 4\sqrt{2^2 \cdot 3} = 14 - 8\sqrt{3}$

5. Racionaliza y simplifica:

a. $\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3-\sqrt{3}}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

b. $\frac{ab}{\sqrt[5]{a^3b}} = \frac{ab \cdot \sqrt[5]{a^2b^4}}{\sqrt[5]{a^3b} \cdot \sqrt[5]{a^2b^4}} = \frac{ab \cdot \sqrt[5]{a^2b^4}}{\sqrt[5]{a^5b^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt[5]{a^2b^4}}{ab} = \sqrt[5]{a^2b^4}$

6. Calcula $\log_{1/3}\sqrt[3]{9}$

Aplicando la definición de logaritmo:

$\log_{1/3}\sqrt[3]{9} = x \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9} \quad \rightarrow \quad 3^{-x} = \sqrt[3]{3^2} \quad \rightarrow \quad 3^{-x} = 3^{2/3} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$

7. Si $\log A = -1$ y $\log B = 5$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de:

$$\log\frac{100\cdot A^3}{\sqrt[4]{A\cdot B}} = \log\frac{100\cdot A^3}{(A\cdot B)^{1/4}} = \log(100\cdot A^3) - \log(A\cdot B)^{1/4} =$$

$$\log 100 + \log A^3 - \frac{1}{4}\cdot\log(A\cdot B) = 2 + 3\log A - \frac{1}{4}(\log A + \log B) =$$

$$2 + 3(-1) - \frac{1}{4}(-1+5) = 2 - 3 - \frac{4}{4} = -1 - 1 = -2$$