5 Ecuaciones racionales

Una **ecuación es racional** cuando alguno de sus términos es una **fracción algebraica**. Para resolverlas, se utiliza el mismo procedimiento que se aplica a las ecuaciones con denominadores numéricos.

PASO A PASO

33 ***Resuelve la ecuación*** $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2\cdot(x+2)}{x^2-1}$.

1.º Eliminamos los paréntesis: $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2x+4}{x^2-1}$

2.º Hallamos el mínimo común múltiplo: $\text{m.c.m.}\,(x-1, x+1, x^2-1) = x^2-1$

3.º Reducimos a común denominador: $\dfrac{3\cdot(x+1)}{x^2-1} + \dfrac{(x-1)\cdot(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{2x+4}{x^2-1}$

4.º Eliminamos los denominadores: $3\cdot(x+1) + (x-1)^2 = 2x+4$

5.º Operamos y resolvemos la ecuación: $3x+3+x^2-2x+1 = 2x+4 \Rightarrow x^2+x+4 = 2x+4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

6.º Comprobamos los resultados: $x = 0 \Rightarrow \dfrac{3}{-1} + \dfrac{-1}{1} = \dfrac{4}{-1} \Rightarrow -4 = -4 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ es solución.}}$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{3}{1-1} + \frac{1-1}{1+1} = \frac{2\cdot 1+4}{1^2-1} \Rightarrow \frac{3}{0} + \frac{0}{2} \neq \frac{6}{0} \Rightarrow x = 1 \text{ no es solución.}$$

34 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x+1}{2x} - \dfrac{5}{2} = 2$

b) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{7}{x^2} = -\dfrac{2}{x^3}$

UN PASO MÁS

35 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{3}{x-2} + \frac{2x}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} = 2$

b) $\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x^2+x-2}$

d) $\frac{3x}{x-1} + \frac{1}{x^3-1} = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}$

e) $\frac{2-x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{3+x}{x-1}$

f) $\dfrac{1}{x + \dfrac{2}{1 - \dfrac{x+3}{x-1}}} = x$

6 Ecuaciones radicales

Las **ecuaciones radicales** son aquellas en las que la incógnita aparece en alguno de sus términos bajo el signo radical.

PASO A PASO

Para eliminar los radicales, se **elevan al cuadrado** los dos miembros de la ecuación, pudiendo aparecer nuevas soluciones.

36 ***Resuelve la ecuación radical $\sqrt{x} = x - 2$.***

1.º Elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-2)^2$$

2.º Simplificamos, operamos y resolvemos la ecuación obtenida:

$$x = x^2 + 4 - 4x \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

3.º Comprobamos los resultados: $x = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{1}\right)^2 = (1-2)^2;\ 1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 \text{ es solución.}}$

$x = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{4}\right)^2 = (4-2)^2;\ 2^2 = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 4 \text{ es solución.}}$

37 Resuelve las siguientes ecuaciones radicales y comprueba en cada caso si los valores obtenidos son o no soluciones de las mismas.

RECUERDA
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

a) $\sqrt{x} = x - 20$

b) $\sqrt{x+1} = 2x - 4$

UN PASO MÁS

38 ***Resuelve la ecuación radical $\sqrt{4x+1} + 3 = 3x$.***

1.º Aislamos el radical en uno de los miembros de la ecuación: $\sqrt{4x+1} = 3x - 3$

2.º Elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación: $\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 = (3x-3)^2$

3.º Operamos y resolvemos la ecuación obtenida:

$$4x + 1 = 9x^2 + 9 - 18x \Rightarrow 9x^2 - 22x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{22 + \sqrt{484 - 288}}{18} = \frac{22 \pm 14}{18} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{8}{18} \Rightarrow x = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

4.º Comprobamos los resultados: $x = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 3 = 3 \cdot 2 \Rightarrow 3 + 3 = 6 \Rightarrow$ $\boxed{x = 2 \text{ es solución.}}$

$$x = \frac{4}{9} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot \frac{4}{9} + 1} + 3 = 3 \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}} + 3 = \frac{12}{9} \Rightarrow \frac{5}{3} + 3 = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{9} \text{ no es solución.}$$

39 Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x} + x = 6$

b) $\sqrt{3x} + 6 = x$

c) $\sqrt{x+3} + 1 = 3x$

d) $\sqrt{x+6} - x = -6$