# PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Probabilidad

**1**. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea

a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.

Solución:

a) Entre las 40 cartas hay 4 reyes ⇒ P(Rey) = 4/40.

b) P(Rey de copas) = 1/40.

c) Las figuras de la baraja son 12: 4 sotas, 4 caballos y 4 reyes. Las 28 restantes no son figuras. P(No figura) = 28/40.

**2**. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una elegida al azar tenga, al menos, una niña?

Solución:

El espacio muestral tiene 8 sucesos elementales:

{*HHH*, *HHM*, *HMH*, *MHH*, *HMM*, *MHM*, *MMH*, *MMM*}, siendo *H* = hombre y *M* = mujer.

La probabilidad de que los tres hijos serán varones es: $P(HHH)=\dfrac{1}{8}$.

Por tanto,

P(al menos una niña) = $1-P(HHH)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

**3**. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:

a) Al menos un as. b) Dos ases. c) Dos números distintos

Solución:

Espacio muestral: *E* = {(1, 1)..., (1, 6), (2,1)…, (2,6)…, (6,1)…, (6,6)} → 36 sucesos elementales.

a) Los sucesos favorables son 11: {(1, 1)..., (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6,1)}. P(al menos un as) = 11/36.

b) P(2 ases) = 1/36 → es el suceso (1, 1).

c) Es el suceso contrario de “dos números iguales” = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}. P(dos números distintos) = 1 – P(dos números iguales) = 1 – 6/36 = 5/6.

**4**. Calcula la probabilidad $P(A\cup B)$ sabiendo que $P(A)$ = 0,3, $P(B)$ = 0,5 y $P(A/B)$ = 0,2.

Solución:

Como $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,2 \Rightarrow P(A\cap B)=0,2\cdot 0,5=0,1$.

Por otra parte, de:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)$ = 0,3 + 0,5 – 0,1 = 0,7.

**5**. En un IES, los alumnos se clasifican según su sexo y práctica de la natación, según muestra la siguiente tabla:

| | Nadador | No nadador | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Hombre | 189 | 301 | 490 |
| Mujer | 165 | 335 | 500 |
| TOTAL | 354 | 636 | 990 |

A la vista de estos datos, calcula la probabilidad de que elegido un alumno al azar:

a) Sea no nadador.

b) Sea mujer y no nadadora.

c) Sea nadadora sabiendo que es mujer.

d) Sea hombre si el alumno elegido no practica natación.

Solución:

Por la regla de Laplace:

a) P("no nadador") = 636/990.

b) P("mujer y no nadadora") = 335/990.

c) P("nadadora"/"ser mujer") = $\dfrac{\text{ser mujer nadadora}}{\text{ser mujer}} = \dfrac{165}{500}$.

d) P("hombre"/"no nadador") = $\dfrac{\text{hombre no nadador}}{\text{no nadador}} = \dfrac{301}{636}$.

**6**. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:

a) Uno a de los resultados sea par y el otro impar.

b) Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.

c) Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.

Solución:

El espacio muestral es el indicado en el problema 3.

a) P(par e impar) = P(1º dado par y 2º impar) + P(1º dado impar y 2º par) = $\dfrac{9}{36} + \dfrac{9}{36} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

b) P(par/suma 7) = 1, ya que para sumar 7 un dado debe ser de puntuación par.
Los sucesos de suma 7 son: (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1). En todos hay un resultado par.
c) hay 15 sucesos en los que la suma es mayor que 7: (2, 6); (3, 5) y (3, 6); (**4**, 4), (**4**, 5) y (**4**, 6); (5, 3), (5, **4**), (5, 5) y (5, 6); (6, 2), (6, 3), (6, **4**), (6, 5) y (6, 6). En 5 de estos casos ha salido un 4.
Por tanto:

P(de 4 si la suma es mayor que 7) = $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

**7**. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras se hacen dos extracciones sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:

a) Dos bolas blancas

b) Sólo una negra

c) Del mismo color

Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.

Solución:

Sin reemplazamiento:

a) $P(BB) = P(1^{\text{o}} B) \cdot P(2^{\text{a}} B / 1^{\text{a}} B) = \dfrac{10}{18} \cdot \dfrac{9}{17} = \dfrac{5}{17}$.

b) $P(NB, BN) = 2 \cdot P(NB) = 2 \cdot \dfrac{8}{18} \cdot \dfrac{10}{17} = \dfrac{80}{153}$.

c) Son del mismo color cuando no hay una banca y una negra (caso anterior); por tanto:

$P$(del mismo color) ) = $1 - \dfrac{80}{153} = \dfrac{73}{153}$.

Con reemplazamiento:

a) $P(BB) = \dfrac{10}{18} \cdot \dfrac{10}{18} = \dfrac{25}{81}$.

b) $P(NB,BN)=2\cdot P(NB)=2\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{10}{18}=\frac{40}{81}$.

c) $P$(del mismo color) ) = $1-\frac{40}{81}=\frac{41}{81}$.

**Distribución binomial.**

**8**. Un examen consta de 10 preguntas del tipo verdadero/falso. Se aprueba con 8 o más preguntas acertadas. Si se responden al azar las cuestiones, ¿qué probabilidad hay de aprobar?

Solución:

Se trata de una distribución binomial: B(10, 0,5).

$$P(X\ge 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\ =$$

$$=\binom{10}{8}\cdot(0,5)^8\cdot(0,5)^2+\binom{10}{9}\cdot(0,5)^9\cdot(0,5)+\binom{10}{10}\cdot(0,5)^{10}=(45+10+1)\cdot(0,5)^{10}=0,0546875.$$

**9**. Se han reunido 1000 familias con 3 hijos. ¿En cuántas se podrán contabilizar 2 chicas? ¿Y en cuántas al menos una chica? (Toma la probabilidad de nacimiento de niña 0,5).

Solución:

El número de chicas en familias de 3 hijos se distribuye B(3, 0,5).

Para una familia, la probabilidad de dos chicas es:

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot(0,5)^2\cdot(0,5)=6\cdot(0,5)^4=0,375.$$

El número esperado de familias con 2 chicas entre 1000 familias será: 1000·0,375 = 375.

Para una familia: P("al menos una chica") = 1 – P(ninguna chica) = 1 – $P(X = 0)$ = 1 – 0,125 = 0,875.

Para mil familias: 1000·0,875 = 875 tendrán al menos una chica.

**10**. Un laboratorio farmacéutico ha comprobado que un 40 % de los que toman un analgésico sufren efectos secundarios. De 5 usuarios, halla la probabilidad de que sufran efectos secundarios:

a) Más de 3. b) Al menos 2.

Solución:

El número de usuarios con efectos secundarios, X, se distribuye según la biniomial B(5, 0,4).

Por tanto:

a) $P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)\ =\binom{5}{4}\cdot(0,4)^4\cdot(0,6)+\binom{5}{5}\cdot(0,4)^5$ = 0,0768 + 0,01024 = 0,08704.

b) $P(X\ge 2)=1-P(X=0)+P(X=1)\ =1-\binom{5}{0}\cdot(0,4)^0\cdot(0,6)^5-\binom{5}{1}\cdot(0,4)\cdot(0,6)^4\ =$

= 1 – 0,07776 – 0,2592 = 0,66304.

**11**. En un proceso de fabricación se producen un 5 % de piezas defectuosas. Si se examinan 6 de ellas al azar, ¿qué probabilidad existe de que:

a) Haya a lo sumo 4 defectuosas. b) Haya una o dos defectuosas.

Solución:

El número de defectuosas, X, se distribuye B(6, 0,05).

a) $P(X\le 4)=1-P(X=5)-P(X=6)\ =1-\binom{6}{5}\cdot(0,05)^5\cdot(0,95)-\binom{6}{6}\cdot(0,05)^6\ =$

= 1 – 0,00000148 – 0,0000000156 $\approx$ 0.

b) $P(X=1)+P(X=2)=\binom{6}{1}\cdot(0,05)\cdot(0,95)^5-\binom{6}{2}\cdot(0,05)^2\cdot(0,95)^4$ = 0,2321 + 0,0305 = 0,2626.

**12**. Una familia se compone de los padres y 6 hijos. Suponiendo igual la probabilidad de nacimiento de niño o niña, calcula:

a) Probabilidad de tener más de una niña.
b) Al menos un niño.
c) Como máximo dos niños.
d) El número medio de hijas.

Solución:

El número de hijas se distribuye B(6, 0,5):

a) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)-P(X=1)$ $=1-\binom{6}{0}\cdot(0,5)^6-\binom{6}{1}\cdot(0,5)^6=$

= 1 – 0,015625 – 0,09375 = 0,890625.

b) $P(X<6)=1-P(X=6)$ $=1-\binom{6}{6}\cdot(0,5)^6$ = 1 – 0,015625 = 0,984375.

c) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$ = 0,2344 + 0,0938+ 0,0156 = 0,3438.

d) La media de hijas es 6·0,5 = 3.

**13**. Cuatro personas de edades y estado de salud semejantes, han contratado una póliza de vida. Las tablas de mortalidad prevén un 0,7 de probabilidad de que esos asegurados vivan dentro de 25 años. Encuentra la probabilidad de que dentro de 25 años:

a) Vivan los 4.
b) No viva ninguno.
c) El número medio de supervivientes.

Solución:

El número de supervivientes se ajusta a una binomial: B(4, 0,7).

a) $P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot(0,7)^4$ = $0,7^4$ = 0,2401.

b) $P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot(0,7)^0\cdot(0,3)^4$ = $0,3^4$ = 0,0081.

c) La media es 4 · 0,7 = 2,8.

**Otros problemas**

**14**. Se tienen dos sucesos aleatorios $A$ y $B$ y se conocen las probabilidades: $P(A)=0,4$; $P(B)=0,5$ y $P(A\cup B)=0,7$.

a) ¿Son los sucesos $A$ y $B$ incompatibles? Razona la respuesta.
b) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.

Solución:

a) Dos sucesos $A$ y $B$ son incompatibles cuando $P(A\cap B)=0$.

Como

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

En este caso:

$P(A\cap B)=0,4+0,5-0,7=0,2\neq 0\ \Rightarrow\ A$ y $B$ no son incompatibles.

b) Dos sucesos $A$ y $B$ son independientes cuando $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

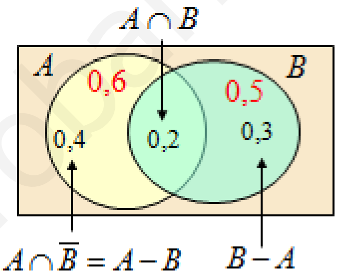
Como
$P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow$ los sucesos son independientes.

**15**. Sean $A$ y $B$ dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A \cap B) = 0,2$, $P(\overline{A}) = 0,4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de $A$. Calcular las siguientes probabilidades:

$$P(B),\quad P(A/B),\quad P(A \cap \overline{B}),\quad P(\overline{A} \cup \overline{B}).$$

Solución:
Si $P(\overline{A}) = 0,4 \Rightarrow P(A) = 0,6$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$ (teniendo en cuenta los datos):
$0,9 = 0,6 + P(B) - 0,2 \Rightarrow P(B) = 0,5$.

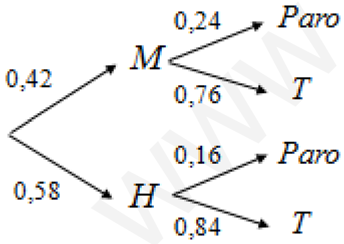



- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$.
- $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ = 0,6 – 0,2 = 0,4.
- Por una de las leyes de Morgan:
  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ = 1 – 0,2 = 0,8.

**16**. El 42 % de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16 % de los hombres están en el paro.
a) Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en el paro y sea hombre.
b) Halla la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar sea hombre.

Solución:
Para la población activa considerada, sean los sucesos:
*M*: mujer; *H*: hombre; *Paro*: estar en paro.

Con los datos del problema puede hacerse un diagrama de árbol como el siguiente.




a) $P(Paro \cap H) = P(H) \cdot P(Paro/H)$ = 0,58 · 0,16 = 0,0928.

b) La probabilidad total de estar en paro es:
$P(Paro) = P(M) \cdot P(Paro/M) + P(H) \cdot P(Paro/H) \Rightarrow$
$P(Paro) = 0,42 \cdot 0,24 + 0,58 \cdot 0,16 = 0,1936$.

Por Bayes:

$$P(H/Paro) = \frac{P(H) \cdot P(Paro/H)}{P(Paro)} = \frac{0,58 \cdot 0,16}{0,1936} = \frac{0,0928}{0,1936} \approx 0,48.$$

→ Sin necesidad de utilizar la fórmula de Bayes: por cada 0,1936 parados, 0,0928 son hombres.

→ También puede hacerse una tabla de contingencia, partiendo, por ejemplo, de 10000 personas activas.

| Personas Activas (10000) | | En paro |
|---|---|---|
| Mujeres | 42% → 4200 | 24% → 1008 |
| Hombres | 58% → 5800 | 16% → 928 |
| Total | 10000 | 1936 |

a) $P(Paro \cap H) = \dfrac{928}{10000} = 0,0928$.

b) $P(H / Paro) = \dfrac{928}{1936} \approx 0,48$.

**17**. En un Centro Comercial el 35 % de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

Solución:

El número de usuarios que utilizan el coche para hacer la compra se puede estudiar como una variable binomial $B(7, 0{,}35)$.

$$P(X=3) = \binom{7}{3} 0,35^3 \cdot 0,65^4 = 35 \cdot 0,00765... \approx 0,2679 .$$

**18**. Un examen de preguntas con respuestas múltiples, consta de 8 preguntas con 4 opciones de contestación. Si un alumno respondiera al azar halla, con la ayuda de la tabla binomial, la probabilidad de que:

a) Responda correctamente a 6
b) Responda al menos 6 correctamente
c) El número medio de respuestas acertadas.

Solución:

La variable que cuenta el número de respuestas correctas, es una binomial B(8, 1/4) = B(8, 0,25).

a) $P(X=6) = \binom{8}{6} 0,25^6 \cdot 0,75^2 = 28 \cdot 0,0001373... \approx 0,003845$.

b) Responder "al menos" 6, es equivalente a responder 6, 7 u 8 preguntas correctamente, o sea,

$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$ = 0,003845 + 0,000366 + 0,000015 = 0,00426.

c) El número medio de respuestas correctas será: 8·0,25 = 2.

**19**. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:

a) No acierte ninguna respuesta correcta.
b) Acierte 6 o más preguntas.

Solución:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p = \dfrac{1}{3}$; la de fallar, $q = \dfrac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8, \dfrac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=0) = \binom{8}{0} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 = \dfrac{256}{6561} = 0,039$.

b) $P(X \geq 6) = P(X=6) + \mathrm{P}(X=7) + P(X=8) =$

$$= \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 28 \cdot \frac{4}{6561} + 8 \cdot \frac{2}{6561} + \frac{1}{6561} = \frac{129}{6561} = 0,0197 .$$