

1



SISTEMAS DE ECUACIONES

ACTIVIDADES

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

$$a) \begin{cases} 3x - y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = -2 \\ 3x + y - z - t = 6 \\ 2x + 2y - 2z - 3t = 9 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x + 3y - z = -4 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ x + y = -2 \\ 6x + 4y = -6 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ x + y - z = 5 \\ 4x + 3y - 2z = 9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 12 \\ x + y - 2z + 3t = 1 \\ 3x - y + 2z + 2t = -3 \\ 3x + 2y + 5z + 7t = -7 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 3 \\ 5x + 3y + z = -6 \\ 4x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x - 2y + z = -8 \\ 2x + 3y - 2z = 10 \\ 5x - 5y + 4z = -27 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ 2x + 5y + 6z = 1 \\ 5x + 7y + 7z = 4 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ -3x + y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = -12 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2x + 4y + z = 5 \\ 5x - 2y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

a) $x = 1, t = -1, z = -2, y = 0$

b) $y = -3, x = 1$

c) $t = -2, z = -1, y = 3, x = 2$

d) $z = \frac{50}{29}, y = \frac{107}{29}, x = -\frac{109}{29}$

e) El sistema es incompatible.

f) $z = -\frac{23}{27}, y = \frac{61}{27}, x = \frac{43}{27}$

g) $z = 3, y = -1, x = 1$

h) El sistema es incompatible.

i) $z = -1, y = 0, x = 1$

j) $z = -3, y = 2, x = -1$

k) $z = 4, y = 54/7, x = 25/7$

l) $z = -1/2, y = 1/2, x = 0$

2 Indica qué ecuaciones dependen de las demás en estos sistemas.

$$a) \begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 4y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

a) La tercera ecuación es la primera ecuación por 2.

b) La tercera ecuación es la segunda ecuación menos la primera ecuación.

3 Discute los siguientes sistemas.

$$a) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = -5 \\ x + 2y + 2z = -5 \\ 2x + 3y + 3z = -7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = -8 \\ 4x + y + 3z = -7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y - z = 4 \\ 4x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x + y - z = 8 \\ x - y + z = -6 \end{cases}$$

a) Sistema compatible determinado: $z = -5, y = 2, x = 1$

b) Sistema compatible indeterminado: $z = \lambda, y = 2 + \lambda, x = 1$

c) Sistema incompatible

d) Sistema compatible determinado: $z = -5, y = 2, x = 1$

4 Discute los siguientes sistemas en función del valor del parámetro a .

$$a) \begin{cases} x + ay = 1 \\ 3x - y = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 4x - 3y + z = -5 \\ 2x + y + az = -3 \\ 6x - 2y + 3z = -4a \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y - az = 3 \end{cases}$$

a) Si $a = 2$, compatible determinado.

En ese caso $x = 5/7$ e $y = 1/7$.

Si $a \neq 2$ el sistema es incompatible.

b) Si $a \neq 2/3$, compatible determinado.

En ese caso, $z = \frac{5}{2-3a}, y = \frac{3-2a}{2-3a}, x = \frac{3-2a}{2-3a}$.

Si $a = 2/3$, el sistema es incompatible.

c) Si $a = 2$ o $a = -59/26$, compatible determinado. Caso contrario es incompatible

5 Halla los valores de k para que el siguiente sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

Sol: $k = -1$, en cuyo caso las soluciones son: $y = z = \lambda, x = 0$.

Sistemas de ecuaciones lineales

6 Indica tres ecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes ecuaciones.

- a) $4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -2$
- b) $2x_1 + 3x_2 = 2$
- c) $2x + 4y - z = 0$
- d) $3x - 3y = 12$

RESPUESTA LIBRE. Basta con multiplicar las ecuaciones por cualquier número real distinto de cero.

7 Indica cuáles de las siguientes transformaciones son válidas entre las ecuaciones de un sistema para obtener otro que sea equivalente.

- a) Sustituir dos ecuaciones del sistema por su suma.
 - b) Multiplicar los primeros términos de todas las ecuaciones por un número real, k .
 - c) Sumar a una ecuación otra ecuación del sistema.
 - d) Multiplicar o dividir una ecuación cualquiera del sistema por un número real.
- a) No.
b) No.
c) Sí.
d) No.

8 Comprueba si son equivalentes estos sistemas.

- a) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ 4x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 8x - y + 3z = 25 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ 3x + 5z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - z = 7 \\ 3x + 5z = 1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 6x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$

- a) Sí.
b) No.
c) No.
d) Sí.

Resolución de sistemas

9 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss.

- a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y - z = -9 \\ 3x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ -x - y + 5z = 10 \\ 3x + 3y + 4z = 8 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ 5y - 3z = -2 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x + y - 3z + t = 6 \\ -3x + y - z - t = -3 \\ 5x - 2z + t = 8 \\ 4x + 3y - z = 5 \end{cases}$

- d) $\begin{cases} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x + y + z - t = 5 \\ x - y - z + t = 6 \\ x - y - z + t = 6 \end{cases}$ m) $\begin{cases} 2x + 3y + z - t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ x - 5y + 3z = 3 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 9x + y + 11z = -4 \end{cases}$
- f) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + z = -5 \\ 3x - y + z = -3 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x + z = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$
- g) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 5y - 2z = 9 \end{cases}$ o) $\begin{cases} x + 2y + z - t = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases}$
- h) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ -x + y = 5/2 \\ 2x + 3y = -5/2 \\ 5x - 2y = -11 \\ 7x - 4y = -16 \end{cases}$ p) $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$
- i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ q) $\begin{cases} -3x + 2y - 5z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ -x - y - 3z = 0 \end{cases}$

- a) El sistema es incompatible.
- b) El sistema es compatible determinado: $x = 1, y = 3, z = 2$
- c) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = \frac{5}{24}, y = -\frac{1}{8}, z = \frac{11}{24}$
- d) El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \\ t = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- e) El sistema es incompatible, luego no admite solución.
- f) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = 0, y = 1, z = -2$
- g) El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + 2}{13} \\ y = \frac{5\lambda + 23}{13} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- h) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = -2, y = \frac{1}{2}$
- i) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = 1, y = 0, z = -1$
- j) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = 2, y = -2, z = 1$
- k) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = 5, y = -5, z = 2$
- l) El sistema es compatible determinado y su solución es:
 $x = 1, y = 0, z = -1, t = 1$
- m) El sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = -1 - 2\lambda - 4\mu \\ y = 1 + \lambda + 3\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- n) El sistema es incompatible, por tanto, no admite solución.
 ñ) El sistema es compatible determinado: $z = 2, y = 1, x = 0$
 o) El sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{3}{2} - 2\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - \lambda \\ t = \frac{3}{2} - 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- p) El sistema es compatible determinado:

$$\Rightarrow z = -\frac{2}{5}; y = \frac{4}{5}; x = -\frac{3}{5}$$

- q) El sistema es compatible indeterminado, con un grado de libertad.:

$$\begin{cases} x = -11\lambda/5 \\ y = -4\lambda/5 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- 10 Calcula las soluciones del primer sistema y el valor de a para que estos dos sistemas sean equivalentes:

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ 2x - y - 2z = -3 \\ x + y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ x - 3y + az = 7 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

La solución es: $x = -\frac{19}{11}, y = -\frac{23}{11}, z = \frac{9}{11}$.

Los sistemas son equivalentes si $a = 3$.

- 11 Halla tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, que si al doble del tercero le restamos dos resulta la suma del segundo y el tercero, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos ocho.

Sol: $x = 22, y = 18, z = 20$

- 12 De tres números, x, y y z , sabemos que el primero más el segundo suman 0, que el primero más el tercero suman 1, que la suma de los tres es 0, y para finalizar, que el primero multiplicado por un número k más el doble de la suma del segundo y el tercero dan 1.

a) ¿Qué se puede decir del valor de k ?

b) ¿Cuánto valen los tres números?

a) $k = 3$

b) $x = 1, y = -1, z = 0$

Discusión de sistemas

- 13 Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea compatible determinado. Justifica la respuesta. Interpreta geoméricamente este sistema.

RESPUESTA LIBRE.

- 14 Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible. Justifica la respuesta.

RESPUESTA LIBRE.

- 15 Indica, razonando tu respuesta y poniendo un ejemplo en caso afirmativo, si existe un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas que sea:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

c) Incompatible.

a) Sí es posible.

b) Sí es posible.

c) No es posible.

- 16 Escribe un sistema incompatible de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

RESPUESTA LIBRE.

- 17 Sin resolver este sistema, di si puede ser incompatible:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Sol: No.

- 18 Determina el valor que ha de tener m para que el siguiente sistema admita una solución distinta de la trivial:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \end{cases}$$

Sol: $m = 1$

- 19 Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función del valor del parámetro m :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + mz = 0 \end{cases}$$

Sol: Si $m \neq 1$, el sistema únicamente admite la solución trivial.

Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = -\frac{\lambda}{13} \\ y = \frac{9\lambda}{13} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- 20 Discute estos sistemas en función del parámetro a .

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - y = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = a \\ -x + (a + 1)y = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - z = a \\ 2x - 2z = 4 \\ y + z = 7 \\ x + 2y - z = 2a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}$

- a) Si $a = 2$, el sistema es compatible determinado y su solución es: $x = \frac{3}{5}, y = -\frac{1}{5}$

Si $a \neq 2$, el sistema es incompatible.

- b) Si $a = 5$, el sistema es compatible determinado y su solución es: $x = 5, y = 4, z = 3$

Si $a \neq 5$, el sistema es incompatible.

- c) Si $a = 1$, el sistema es compatible determinado y su solución es: $x = 3, y = 2$

Si $a = -1$, el sistema es compatible determinado y su solución es: $x = 1, y = 0$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, el sistema es incompatible.

- d) Si $a = 1$, sistema incompatible.

Si $a \neq 1$, sistema compatible determinado.

- 21 Determina el valor de a para que el siguiente sistema sea compatible:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + ay = 0 \\ x + 4y = -a \end{cases}$$

Sol: $a = 3 \Rightarrow x = 1, y = -1$

$$a = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{7}, y = \frac{3}{7}$$

- 22 Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$

- a) Discútelo en función del valor del parámetro a .
b) Resuélvelo para el valor de a que lo hace indeterminado.

a) Si $a = 1$, el sistema es incompatible.

Si $a = -2$, el sistema es compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

- 23 Discute en función del parámetro m el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

Cuando sea posible, da también la solución.

Sol: Si $m = -1$, sistema incompatible.

Si $m \neq -1$, sistema compatible indeterminado con un grado de libertad y cuya solución es:

$$\begin{cases} z = -\frac{1}{1+m} \\ y = \lambda \\ x = \frac{1+2m}{1+m} - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- 24 Dado el sistema siguiente de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

a) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

a) Por ejemplo: $3x - 2y + z = 0$

b) Por ejemplo: $4x - y = 3$

- 25 Se sabe que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - az = -2 \\ 2x + y - 8z = -1 \\ -x - 2y + 10z = 5 \end{cases}$$

tiene más de una solución. Determina el valor del parámetro a que hace esto posible.

Sol: $a = 6$.

- 26 Discute el siguiente sistema según el valor del parámetro m y encuentra la solución para un valor de m que lo haga compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + my - 5z = -4 \end{cases}$$

Sol: Si $m = -3 \Rightarrow 0y = -4$, el sistema es incompatible.

Si $m \neq -3$, el sistema es compatible determinado.

Por ejemplo, si $m=0$ sus soluciones son:

$$x=26/27, y=-4/3, z=32/27$$

- 27 Discute el siguiente sistema en función del valor de los parámetros a y b :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z + t = 0 \\ 3x - y + z + t = a \\ x - 3y + 3z + 2t = b \end{cases}$$

Sol: Si $b = -1$ y $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad. Sus soluciones son:

$$\begin{cases} t = \lambda \\ z = \mu \\ y = \mu + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \\ x = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si $b \neq -1$ o $a \neq 1$, el sistema es incompatible.

Problemas de aplicación

- 28 La suma de las tres cifras de un número es 15. Si se intercambian la primera y la segunda cifra, el número aumenta 180 unidades, y si se intercambian la segunda y la tercera, aumenta 18 unidades. Calcula el número.

Sol: 357.

- 29 Un financiero invirtió en bolsa 18 000 € en acciones de tres empresas, A , B y C , y obtuvo un beneficio de 900 €. Invertió en A tanto como en B y C juntas y los beneficios de las empresas fueron de un 5% en A , un 3% en B y un 10% en C , ¿cuánto invirtió en cada una?

Sol: $A = 9000$ €, $B = 6428,58$ €, $C = 2571,42$ €

- 30 Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres formatos: A , B y C . Las cajas del tipo A tienen un peso de 250 g y un precio de 1 €, las B pesan 500 g y cuestan 1,80 €, mientras que las del tipo C pesan 1 kg y valen 3,30 €. A una farmacia se le ha suministrado un lote de cinco cajas, con un peso total de 2,5 kg, por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

Sol: Se han suministrado 2 cajas del tipo A , 2 del tipo B y 1 del tipo C .

- 31 Si un millón de votantes de la izquierda hubieran votado a la derecha, las dos coaliciones hubieran obtenido el mismo número de votos. Pero si, por el contrario, un millón de votantes de la derecha hubieran votado a la izquierda, esta hubiera obtenido el triple de votos que aquella. ¿Cuántos votos ha obtenido cada una de las coaliciones?

Sol: $Dcha = 3\,000\,000$, $Izda = 5\,000\,000$

- 32 Una empresa fabrica tres tipos de coches: A , B y C . El modelo A pasa 20 h en la unidad de montaje; el B , 30 h, y el C , 10 h. Los vehículos son enviados después a la unidad de acabado, donde el modelo A tiene que estar 10 h; el B , 20 h, y el C , 30 h. Si para fabricar 14 coches la unidad de montaje ha trabajado 370 h, y la de acabado, 290 h, ¿cuántos vehículos de cada tipo se han producido?

Sol: Se han producido 1 coche del modelo A , 11 del modelo B , y 2 del modelo C .

- 33 Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia entre las alturas de Toni y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las estaturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Toni es igual a nueve veces la de Carlos. ¿Cuánto mide cada uno?

Sol: Carlos mide 160 cm; Toni, 180 cm, y Juan, 175 cm.

- 34** ■■■ La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades del padre, la madre y el hijo es de 80 años, y dentro de 5 años la suma de las edades de la madre y del hijo superará en 5 años la edad del padre. ¿Cuántos años tienen los tres en la actualidad?
Sol: El padre tiene 40 años, la madre 30 y el hijo 10.
- 35** ■■■ Calcula los valores de a , b y c para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $A(1, 8)$, $B(-1, -2)$ y $C(-2, -10)$.
Sol: $a = -1$, $b = 5$, $c = 4$
- 36** ■■■ Un automóvil sube las cuestas a una velocidad de 54 km/h y las baja a 90 km/h; en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B , dos puntos que distan entre sí 192 km, tarda 2 h y 30 min, y para volver de B a A , 2 h y 38 min. Calcula la longitud del camino llano entre A y B .
Sol: 120,72 km.
- 37** ■■■ Un trayecto de 200 km se debe realizar combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 5 €/km; el del ferrocarril, de 2 €/km, y el de autobús, de 3 €/km. El recorrido nos ha costado 500 €, por haber hecho el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determina las distancias recorridas en cada uno de los medios de transporte.
Sol: En taxi recorre 16,67 km, en tren 133,33 km y en autobús 50 km.
- 38** ■■■ Una compañía aérea realiza vuelos desde Girona a tres ciudades A , B y C . Calcula el precio de los billetes a cada ciudad si sabes que si vende 10 billetes a la ciudad A , 15 a B y ninguno a C , ingresa 925 €. Si vende 12 billetes para A , 8 para B y ninguno para C , ingresa 760 €. Si vende 6 billetes para A , 5 para B y 8 para C , ingresa 855 €.
Sol: $A = 40$ € y $B = 35$ € y $C = 55$ €.
- 39** ■■■ Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es 10 veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su *Sinfonía inacabada*. Así, la suma de las edades de ambos músicos es 77 años. Cinco años después muere Beethoven Schubert tiene los mismos años que Beethoven tenía al componer su primera sinfonía. Halla el año de nacimiento de cada uno.
Sol: Beethoven nació en 1770 y Schubert en 1797.
- 40** ■■■ Tres entidades financieras A , B y C ofrecen respectivamente, para depósitos superiores a 2 000 €, un interés anual del 2%, el 3% y el $k\%$ (que no conocemos). Juana, Manuel y Daniel deciden invertir sus ahorros en estas entidades durante un año. Sabemos que si todos lo hicieran en la entidad A obtendrían unos beneficios totales de 164 €; pero si Juana optase por A , Manuel por C y Daniel por B , obtendrían 192 €; finalmente, si Juana y Manuel se decidiesen por B y Daniel por C , obtendrían 218 €.
- a)** Describe la situación con un sistema de ecuaciones.
b) Sin resolver el sistema, determinar la cantidad total de dinero invertida por las tres personas.
c) Halla, si existe, un valor de k para el que existan infinitas soluciones. Resuelve el sistema para este valor de k y da tres soluciones diferentes.
- a)**
$$\begin{cases} x + y + z = 8200 \\ 2x + ky + 3z = 19200 \\ 3x + 3y + kz = 21800 \end{cases}$$
- b)** 8200 €.
- d)** $k = 2$ $x = 2400$, $y = 3000$, $z = 2800$
 $x = 2900$, $y = 2500$, $z = 2800$
 $x = 3400$, $y = 2000$, $z = 2800$
- 41** ■■■ Una persona va a la vinatería y compra tres tipos de vino: A , B y C , que cuestan 3 €, 7 € y 8 € respectivamente. En total compra 20 botellas y se gasta 100 €. Halla el número de botellas de cada clase que ha comprado sabiendo que como mínimo ha comprado una de cada clase.
Sol: 11 de 3€, 5 de 7€ y 4 de 8€.
- 42** ■■■ Una marca comercial utiliza tres ingredientes: A , B y C , en la elaboración de tres tipos de pizzas: P_1 , P_2 y P_3 . La pizza P_1 se elabora con 1 unidad de A , 2 de B y 2 de C ; la P_2 se elabora con 2 unidades de A , 1 de B y 1 de C , y la P_3 se elabora con 2 unidades de A , 1 de B y 2 de C . El precio de venta al público es de 4,80 € para P_1 , 4,10 € para P_2 y 4,90 € para P_3 . Sabiendo que el beneficio es de 1,60 € en cada una, halla cuánto cuesta cada ingrediente.
Sol: $C = 0,80$ €; $B = 0,50$ €; $A = 0,60$ €
- 43** ■■■ Las edades (en años) de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones: la edad del padre es α veces la edad del hijo. El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años. El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.
- a)** Establece las edades de los tres suponiendo $\alpha = 2$.
b) Para $\alpha = 3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?
c) Siguiendo con $\alpha = 3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es 200 en vez de 182?
- a)** Hijo: 18, Abuelo: 64, Padre: 36
b) No tiene solución.
c) Hay infinitas soluciones, muchas sin sentido real: $z = \lambda$, $x = 100 - 2\lambda$, $y = 3\lambda$.
- 44** ■■■ Tres familias van a una pizzería. La primera familia pide 1 pizza grande, 2 medianas y 4 pequeñas, la segunda 1 grande y 1 pequeña, y la tercera, 1 mediana y 2 pequeñas. Si han pagado, respectivamente, 51,50 €, 15,90 € y 21 €. Calcula el precio de cada una de las pizzas.
Sol: La pizza pequeña vale 6,40€, la mediana 8,20€ y la grande 9,50€.
- 45** ■■■ Javier, Pedro y Eva corren en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Javier, Pedro recorre 2 kilómetros y Eva recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al finalizar, la suma de las distancias recorridas por los tres fue de 45 km. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno?
Sol: 10 km recorre Javier, 20 km recorre Pedro y 15 km recorre Eva
- 46** ■■■ Carmen y Mercedes tenían 20 000 € cada una para invertir. Cada una de ellas distribuye su dinero de la misma forma en tres partes P , Q y R y las ingresan en una entidad financiera. Al cabo de un año, a Carmen le han dado un 4% de interés por la parte P , un 5% por la parte Q y un 4% por la parte R y a Mercedes le han dado un 5% por la parte P , un 6% por la parte Q y un 4% por la parte R . Carmen ha recibido un total de 850 € de intereses y Mercedes ha recibido 950 €. ¿De qué cantidad de euros constaba cada parte P , Q y R ?
Sol: $P = 5000$ €, $Q = 5000$ €, $R = 10000$ €

- 47 Tres trabajadores A , B y C , al concluir un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción:

	Trabajo (h)	Dietas (€)	Desplazamiento (km)
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga a los tres trabajadores la misma retribución: x euros por hora trabajada, y euros por cada dieta y z euros por km de desplazamiento y que paga ese mes un total de 924 euros al trabajador A , 1 390 euros al B y 646 euros al C , calcula x , y y z .

Sol: $x = 15$ €, $y = 30$ €, $z = 0,16$ €

- 48 Arturo decide invertir una cantidad de 12 000 € en bolsa comprando acciones de tres empresas distintas: A , B y C . Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Como resultado de todo ello, Arturo ha obtenido un beneficio de 432,50 €. Determina cuánto invirtió Arturo en cada una de las empresas.

Sol: Arturo invirtió 8 000 € en la empresa A , 2 750 € en la empresa B y 1 250 € en la empresa C .

- 49 Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

Sol: El litro de leche vale 1 €, el de aceite 3 € y el kg de jamón 16 €.

- 50 Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A , B y C . Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A , se habría obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada sala.

Sol: A la sala A acudieron 100 espectadores, a la sala B fueron 80 y a la C , 20 espectadores.

- 51 Se quiere confeccionar una dieta con tres clases de alimentos, A , B y C . El alimento A tiene 10 calorías por cada 100 g, el B , 30 calorías por cada 100 g, y el C , 40 calorías por cada 100 g.

a) Si la dieta, que tiene G gramos de alimento al día, está restringida a 1 230 calorías y la cantidad de alimento A ha de ser el doble, en peso, que la de C . Determina en función de G , las cantidades de cada alimento.

b) Determina los valores entre los que está comprendido G para que las condiciones de la dieta se puedan cumplir.

$$a) a = 2G - 8200 \quad b = 1230 - 2G \quad c = G - 4100$$

b) G está comprendido entre 4 100 y 6 150 gramos.

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso:

- 52 Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne. Si pagamos 18 € por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kg de tomates y 500 gramos de gambas?

a) 21 euros b) 20,50 euros c) 31 euros

Sol: La respuesta correcta es la a).

- 53 El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. Nos ha dado el doble de billetes de 10 euros que de 20 euros. ¿Cuántos billetes de cada tipo nos ha entregado el cajero?

a) Dos de 10 €, uno de 20 € y 5 de 50 €.

b) Dos de 20 € y 5 de 50 €.

c) Tres de 10 €, tres de 20 € y 4 de 50 €.

Sol: La respuesta correcta es la a).

- 54 En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7,2. La puntuación del primer problema fue un 40% más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?

a) 1.º problema: 1,8 puntos, 2.º: 1 puntos y 3.º: 4,4 puntos.

b) 1.º problema: 1,4 puntos, 2.º: 1 puntos y 3.º: 4,8 puntos.

c) 1.º problema: 1,8 puntos, 2.º: 1,4 puntos y 3.º: 4 puntos.

Sol: La respuesta correcta es la a).

1. Comprueba si los siguientes sistemas son equivalentes.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x = 3 \end{cases}$$

Sol: Sí son equivalentes.

2. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene un sistema de 2 ecuaciones independientes con 3 incógnitas?

b) Dado un sistema de r ecuaciones independientes con n incógnitas, ¿cuántos grados de libertad tiene el sistema?

a) $3 - 2 = 1$, luego un grado de libertad.

b) $n - r$ grados de libertad

3. Resuelve por el método de Gauss este sistema y compruébalo con ayuda de la calculadora o el ordenador.

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + 3z = 5 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

a) $x = 5, y = 6, z = -8$

b) Es un sistema incompatible sin solución.

4. Discute el sistema dependiendo del valor de m y resuelve cuando sea posible.

a)
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + mz = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} mx + my - mz = 1 \\ mx + y - mz = 1 \end{cases}$$

a) Al ser un sistema homogéneo siempre tendrá la solución trivial $x = y = z = 0$. Esta será única en el caso $m \neq -\frac{5}{7}$. Si $m = -\frac{5}{7}$ entonces será un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad, con solución $x = \frac{41\lambda}{7}, y = \frac{10\lambda}{7}, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) El sistema será compatible indeterminado en todo caso.

■ Si $m = 1$ entonces ambas ecuaciones son la misma y la solución tendrá dos grados de libertad: $x = 1 - \lambda + \mu, y = \lambda, z = \mu, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

■ Si $m \neq 1$ entonces solo habrá un grado de libertad en la solución: $x = 1/m + \lambda, y = 0, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

5. El gasto mensual en salarios de una empresa de 36 trabajadores es de 54 900 €. Hay tres categorías de trabajadores: A, B y C cuyos salarios mensuales son 900 €, 1 500 € y 3 000 €, respectivamente. Sin despedir a nadie, la empresa quiere reducir el gasto salarial en un 5%. Para hacerlo ha reducido un 5% el salario de categoría A, un 4% el de categoría B y un 7% el de categoría C. Averigua cuántos trabajadores hay en cada categoría.

Sol: 11 trabajadores de categoría A, 20 de la categoría B y 5 de categoría C.