Sea *f* la función definida como $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x\neq a$.
a) Calcula *a* y *b* para que la gráfica de *f* pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.
b) Para el caso de $a=2$, $b=3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como f pasa por el punto (2,3) tenemos que $f(2)=3\Rightarrow \dfrac{4a+b}{a-2}=3\Rightarrow a+b=-6$.

Como f tiene una asíntota oblicua con pendiente -4, tenemos que:

$$-4\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-4\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{ax-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{a-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{-2}=-4\Rightarrow a=4$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que:

$$a+b=-6\Rightarrow 4+b=-6\Rightarrow b=-10$$

Luego, los valores son: $a=4$; $b=-10$

b) Si $a=2$; $b=3$, la función es: $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{2-x}$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

$$f(1)=\frac{2+3}{2-1}=5$$

$$f'(x)=\frac{4x(2-x)-(-1)(2x^2+3)}{(2-x)^2}=\frac{-2x^2+8x+3}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{-2+8+3}{1}=9$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=9(x-1)\Rightarrow y=9x-4$$

Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{sen\,x}}{x^{2}}$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

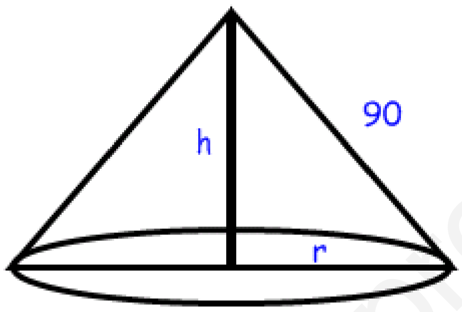
Como $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{sen\,x}}{x^{2}} = \frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{sen\,x}}{x^{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-\cos x\cdot e^{sen\,x}}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+sen\,x\cdot e^{sen\,x}-\cos^{2} x\cdot e^{sen\,x}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?. (Recuerda que el volumen del cono es $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $V_{\max}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

b) Relación entre las variables: $r^2+h^2=8100 \Rightarrow r^2=8100-h^2$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{\max}=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(8100-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(8100h-h^3)$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V'=\frac{1}{3}\pi(8100-3h^2)=0 \Rightarrow h=\sqrt{\frac{8100}{3}}=\sqrt{2700}=30\sqrt{3}\ cm$$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$V''=\frac{1}{3}\pi(-6h) \Rightarrow V''(h=30\sqrt{3})=\frac{1}{3}\pi(-180\sqrt{3})<0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones de los catetos son : $h=30\sqrt{3}\ cm$; $r=30\sqrt{6}\ cm$

Sea ***f*** la función definida como $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}}$ para $\boldsymbol{x\neq\pm 1}$.   **a) Estudia y halla las asíntotas a la gráfica de *f*.**   **b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.**   **c) Esboza la gráfica de *f*.**   **MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: $x=1$ y $x=-1$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{2}=\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2x}\right]=0$$

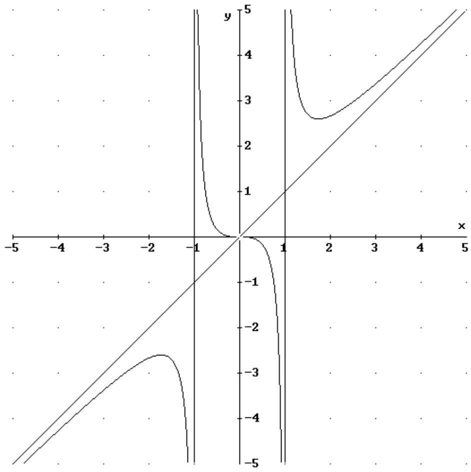
b) Calculamos la derivada de la función e igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-\sqrt{3}\ ;\ x=\sqrt{3}$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
Signo y'	+	–	–	–	–	+
Función	C	D	D	D	D	C

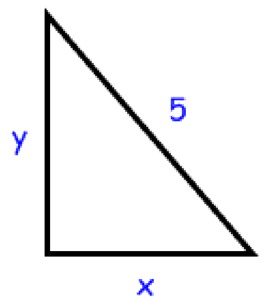
$M=\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ No existe Nada No existe $m=\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

c)



Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = \dfrac{x \cdot y}{2}$.

b) Relación entre las variables: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{25x^2 - x^4}}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero: $S' = \dfrac{\dfrac{50x - 4x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}}}{2} = \dfrac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{2}}$

Como es una longitud tomamos el valor positivo $x = \sqrt{\dfrac{25}{2}}$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$S'' = \frac{-4x \cdot (2\sqrt{25-x^2}) - 2\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}(25-2x^2)}{4\sqrt{25-x^2}} = \frac{x(2x^2 - 75)}{2(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}$$

$$S''\left(x = \sqrt{\frac{25}{2}}\right) = \frac{\sqrt{\dfrac{25}{2}}(25-75)}{2(25-\dfrac{25}{2})\sqrt{25-\dfrac{25}{2}}} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones de los catetos son: $x = \dfrac{\sqrt{50}}{2}\ m\ ;\ y = \dfrac{\sqrt{50}}{2}\ m$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x^2+3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.
a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x-2y+1=0$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$. La pendiente de la recta $x-2y+1=0$, es: $m=\dfrac{1}{2}$. Igualando, nos queda:

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x+6=x^2+3x\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=3$$

Como el dominio de la función es $(0,+\infty)$, sólo vale el punto $(3,\ln 18)$.

b) Calculamos $f(3)=\ln 18$ y $f'(3)=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$.

La recta tangente es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)\Rightarrow y-\ln 18=\dfrac{1}{2}(x-3)$

La recta normal es: $y-f(3)=-\dfrac{1}{f'(3)}\cdot(x-3)\Rightarrow y-\ln 18=-2\cdot(x-3)$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} e^x(x^2+ax) & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$.
Calcula las constantes *a, b* y *c* sabiendo que *f* es derivable y que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ tiene de pendiente 3.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable en $\mathbb{R}$ también tiene que ser continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto:

Continua en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^x(x^2+ax)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{bx^2+c}{x+1}=c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow c=0$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} e^x(x^2+ax)+e^x(2x+a) & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{2bx(x+1)-bx^2}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Derivable en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow a=0$

La recta tangente en $x=1$ tiene de pendiente 3:

$$f'(1)=3\Rightarrow \frac{2b\cdot 1(1+1)-b1^2}{(1+1)^2}=3\Rightarrow \frac{3b}{4}=3\Rightarrow b=4$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida como $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el puno de abscisa $x=-5$ y en el punto de abscisa $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada de *f*.

$$f'(x)=\sqrt[3]{3-x}+(x+1)\frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

Calculamos $f'(-5)$ y $f'(2)$.

$$f'(-5)=\sqrt[3]{3+5}+(-5+1)\frac{-1}{3\sqrt[3]{(3+5)^2}}=2+\frac{4}{12}=\frac{7}{3}$$

$$f'(2)=\sqrt[3]{3-2}+(2+1)\frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-2)^2}}=1-\frac{3}{3}=0$$

Calculamos $f(-5)$ y $f(2)$.

$$f(-5)=(-5+1)\sqrt[3]{3+5}=-8$$

$$f(2)=(2+1)\sqrt[3]{3-2}=3$$

La recta tangente en $x=-5$ es: $y-f(-5)=f'(-5)\cdot(x+5)\Rightarrow y+8=\frac{7}{3}(x+5)$

La recta normal en $x=-5$ es: $y-f(-5)=-\frac{1}{f'(-5)}\cdot(x+5)\Rightarrow y+8=-\frac{3}{7}(x+5)$

La recta tangente en $x=2$ es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=0(x-2)\Rightarrow y=3$

La recta normal en $x=2$ es: $y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=-\frac{1}{0}(x-2)\Rightarrow x=2$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=a\,sen\,x+bx^2+cx+d$, determina los valores de las constantes *a, b, c* y *d* sabiendo que la gráfica de *f* tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y que la segunda derivada de *f* es $f''(x)=3\,sen\,x-10$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de *f*.

$$f'(x)=a\cos x+2bx+c \quad ; \quad f''(x)=-a\,sen\,x+2b$$

Vamos aplicando los datos del problema para calcular las constantes.

$f''(x)=-a\,sen\,x+2b=3\,sen\,x-10\Rightarrow a=-3\ ;\ b=-5$

Pasa por $(0,4)\Rightarrow f(0)=4\Rightarrow d=4$

Tangente horizontal en $(0,4)\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow a+c=0\Rightarrow c=-a=3$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad 1\le x \end{cases}$.

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función e^{-x}, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $1-x^2$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $\dfrac{2}{x+1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. Por lo tanto, sólo estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$ y $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1-x^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1 \Rightarrow Continua$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 1-x^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x+1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow No\ Continua\ y\ no\ derivable$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1\cdot e^{-x} & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$

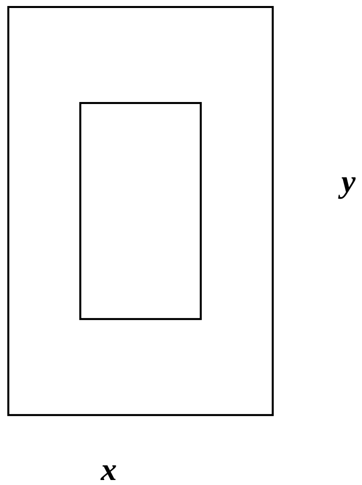
Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow No\ derivable$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\ y\ 1\}$

Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



1) $S_{\min} = x \cdot y$

2) $18 = (x-2)\cdot(y-4) \Rightarrow y = \dfrac{10+4x}{x-2}$

3) $S_{\min} = x \cdot y = x \cdot \dfrac{10+4x}{x-2} = \dfrac{10x+4x^2}{x-2}$

4) $S' = \dfrac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2-16x-20=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=5$

Luego, las dimensiones de la hoja de papel son: $x = 5\ cm\ ;\ y = 10\ cm$

Considera la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ \ 0\le x\le 2 \\ cx & si\ \ 2< x\le 4\end{cases}$

a) Sabiendo que *f* es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0)=f(4)$, determina los valores de *a, b* y *c*.
b) Para $a=-3$, $b=4$ y $c=1$ halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como es derivable, la función es continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-}(x^2+ax+b)=4+2a+b \\ \lim_{x\to 2^+}(cx)=2c \end{array}\right\}\Rightarrow 4+2a+b=2c\Rightarrow 2a+b-2c=-4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a \\ c\end{cases}$. Como es derivable, se cumple:

$$f'(2^-)=f'(2^+)\Rightarrow 4+a=c\Rightarrow a-c=-4$$

Como además, $f(0)=f(4)\Rightarrow b=4c$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b-2c=-4 \\ a-c=-4 \\ b=4c \end{array}\right\}\Rightarrow a=-3\ ;\ b=4\ ;\ c=1$$

b) Los extremos absolutos de una función se pueden alcanzar en:

1. Los puntos donde la función no es continua ni derivable.
2. Los extremos del intervalo.
3. Las soluciones de $f'(x)=0$

Vamos a calcular $f'(x)=0\Rightarrow 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

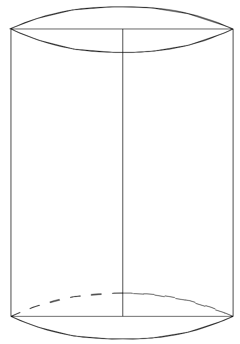
Luego, los extremos absolutos pueden estar en los puntos $x=0$; $x=\frac{3}{2}$; $x=4$. Vamos a calcularlos.

$$f(0)=4\ \ ;\ \ f(4)=4\ \ ;\ \ f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+4=\frac{7}{4}$$

Por lo tanto, f alcanza su máximo absoluto en $x=0$ y $x=4$ y vale 4. Su mínimo absoluto lo alcanza en $x=\frac{3}{2}$ y vale $\frac{7}{4}$.

Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $V = \pi r^2 h$

b) Relación entre las variables: $54 = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow h = \dfrac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{27 - \pi r^2}{\pi r}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} = 27r - \pi r^3$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V' = 27 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{27}{3\pi}} = \pm 1'69\, m$$

Solo vale la solución positiva ya que estamos calculando dimensiones, luego:

$$r = 1'69\ m \ ;\ h = 3'39\ m$$

Sea $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$.¿Cuál es esa distancia?.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Función que queremos que sea mínimo: La distancia entre los puntos $(2,0)$ y $(x,\sqrt{x-1})$.

$$d=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x-1}-0)^2}=\sqrt{x^2-3x+3}$$

Derivamos e igualamos a cero

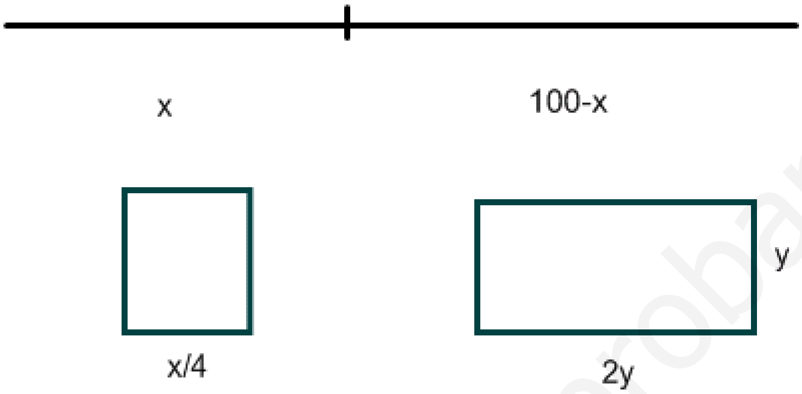
$$d'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Luego el punto es: $P=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La distancia mínima es: $d=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ u$

Un alambre de longitud 100 metros se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2y^2$

b) Relación entre las variables: $100 - x = 2y + 2y + y + y = 6y \Rightarrow y = \frac{100-x}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable.

$$S_{\min} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2y^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{100-x}{6}\right)^2 = \frac{17x^2 - 1600x + 80000}{144}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{34x - 1600}{144} = 0 \Rightarrow x = \frac{800}{17}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S'' = \frac{34}{144} > 0 \Rightarrow mínimo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \frac{800}{17} m$; $100 - x = \frac{900}{17} m$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=4-x^2$
a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x=2$ es:

$$y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}(x-2)$$

Calculamos: $f(2)=4-2^2=0$

$$f'(x)=-2x\Rightarrow f'(2)=-4$$

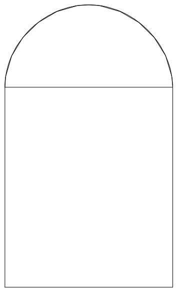
Sustituyendo, tenemos: $y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}(x-2)\Rightarrow y-0=-\frac{1}{-4}(x-2)\Rightarrow x-4y-2=0$

a) La pendiente de la recta que nos dan es: $x+2y-2=0\Rightarrow y=\frac{-x+2}{2}\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$. La recta perpendicular tendrá de pendiente $m=2$.

$$f'(x)=-2x=2\Rightarrow x=-1 \quad ; \quad f(-1)=4-(-1)^2=3$$

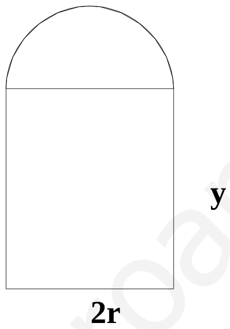
Luego, el punto que nos piden es: $(-1,3)$

Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{max} = 2ry + \frac{\pi r^2}{2}$

b) Relación entre las variables: $10 = 2r + 2y + \pi r \Rightarrow y = \frac{10 - 2r - \pi r}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{max} = 2ry + \frac{\pi r^2}{2} = 2r\left(\frac{10 - 2r - \pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{20r - 4r^2 - \pi r^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{20 - 8r - 2\pi r}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{20}{8 + 2\pi} = 1'4$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-8 - 2\pi}{2} < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones son: $r = 1'4\, m$; $y = 1'4\, m$

Sea $f:\left[\frac{1}{e},4\right]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si \quad \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-\ln(2) & si \quad 2<x\le 4\end{cases}$

Donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e},4\right)$.

b) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} x-\ln(x)+a=2-\ln 2+a \\ \lim_{x\to 2^+} bx+1-\ln 2=2b+1-\ln 2\end{array}\right\}\Rightarrow 2-\ln 2+a=2b+1-\ln 2\Rightarrow a-2b=-1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & si \quad \frac{1}{e}\le x<2 \\ b & si \quad 2<x<4\end{cases}$

Como es derivable en $x=2$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ f'(2^+)=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a-2\cdot\frac{1}{2}=-1\Rightarrow a=0$

b) La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & si \quad \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ \frac{1}{2}x+1-\ln(2) & si \quad 2<x\le 4\end{cases}$

Sabemos que los extremos absolutos pueden estar en:

- Los extremos del intervalo, en este caso $x=\frac{1}{e}$ y $x=4$
- En los puntos donde se anula la derivada, en este caso, $1-\frac{1}{x}=0\Rightarrow x=1$

Para $x=\frac{1}{e}$, la función vale: $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}+1=1'36$

Para $x=4$, la función vale: $f(4)=\frac{1}{2}\cdot 4+1-\ln 2=3-\ln 2=2'30$

Para $x=1$, la función vale: $f(1)=1-\ln 1=1$

Luego, el máximo absoluto está en $x=4$ y vale $f(4)=2'30$. El mínimo absoluto está en $x=1$ y vale $f(1)=1$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determina *a*, *b* y *c* sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

- El punto (1,0) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*

$$\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (1,0)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a\cdot 1+2b=0\end{cases}$$

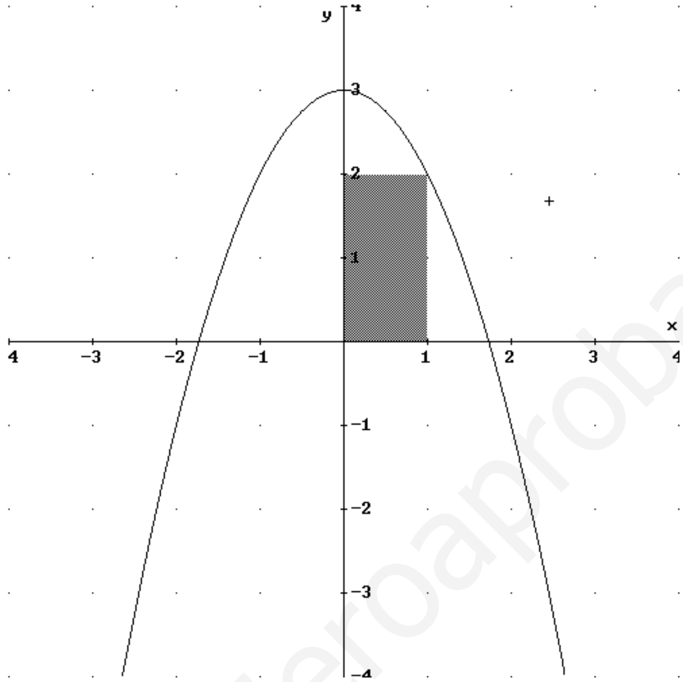
- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ tiene de pendiente -3

$$\Rightarrow f'(1)=-3\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-3$$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ 6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-3\end{array}\right\}$ resulta: $a=3$; $b=-9$; $c=6\Rightarrow f(x)=3x^3-9x^2+6x$

En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $y = -x^2 + 3$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot (-x^2 + 3) = -x^3 + 3x$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

e) Comprobamos que valor corresponde a un máximo

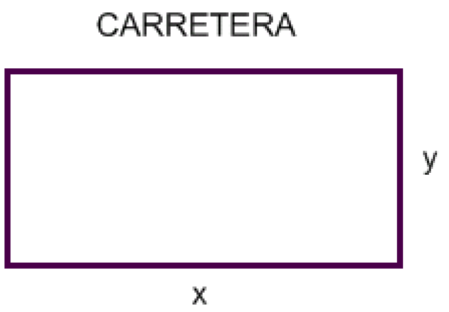
$$S'' = -6x$$
$$S''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo}$$
$$S''(-1) = -6 \cdot (-1) = 6 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo}$$

Además, el valor $x = -1$ no sirve porque no está en el primer cuadrante.

Luego, las dimensiones son: $x = 1$; $y = 2$

Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $3.000 = 100x + 10x + 10y + 10y \Rightarrow y = \dfrac{3.000 - 110x}{20} = \dfrac{300 - 11x}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot \frac{300 - 11x}{2} = \frac{300x - 11x^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = \frac{300 - 22x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{150}{11}\ m\ ;\ y = 75\ m$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-22}{2} < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \dfrac{150}{11}\ m\ ;\ y = 75\ m$

En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión $\dfrac{400x}{x-30}$.
Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a que edad se alcanza.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Nos están dando una función que viene definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} -x^2+70x & si \quad 18\leq x<50 \\ \dfrac{400x}{x-30} & si \quad x\geq 50 \end{cases}$

Sabemos que los extremos absolutos pueden estar en:

- Los extremos del intervalo, en este caso $x=18$

- En los puntos donde se anula la derivada, en este caso, $-2x+70=0 \Rightarrow x=35$

- En los puntos donde no es continua o derivable, en nuestro caso, $x=50$ que donde cambia de una función a la otra

Para $x=18$, la función vale: $f(18)=-18^2+70\cdot 18=936$
Para $x=35$, la función vale: $f(35)=-35^2+70\cdot 35=1225$
Para $x=50$, vamos a ver si la función es continua

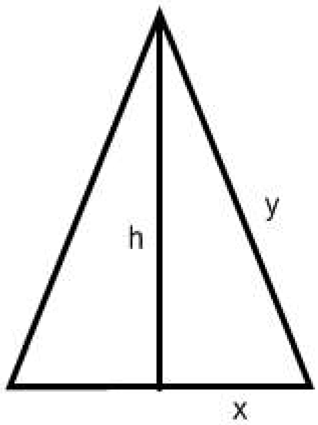
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 50^-}(-x^2+70x)=1000 \\ \lim\limits_{x\to 50^+}\left(\dfrac{400x}{x-30}\right)=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 50^-} f(x)=\lim_{x\to 50^+} f(x)=1000$$

Luego, la función es continua y vale 1000.

Por lo tanto el máximo de ingresos es 1225 € y se alcanza a la edad de 35 años.

Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



1) Escribimos la función que queremos que sea máximo: $S_{max} = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h$

2) Relación entre las variables:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 2y = 8 \; ; \; x + y = 4 \\ h^2 + x^2 = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(4-x)^2 - x^2} = \sqrt{16 - 8x}$$

3) Escribimos la función que queremos que sea máximo con una sola variable:

$$S_{max} = x \cdot h = x \cdot \sqrt{16 - 8x} = \sqrt{16x^2 - 8x^3}$$

4) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$S' = \frac{32x - 24x^2}{2\sqrt{16x^2 - 8x^3}} = \frac{16x - 12x^2}{\sqrt{16x^2 - 8x^3}} = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Luego, la base del triángulo es $2x = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ y la altura $h = \sqrt{16 - 8 \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

5) Comprobamos que $x = \frac{4}{3}$ corresponde a un máximo, sustituyendo este valor en la segunda derivada y sale $S''\left(\frac{4}{3}\right) < 0$, luego, es un máximo.

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x\neq 0$.

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntotas Verticales: $x=0$.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+1}{x^3}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota Oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+1}{x^4}=3$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^4+1}{x^3}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

Luego, la asíntota oblicua es: $y=3x$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{12x^3\cdot x^3-3x^2(3x^4+1)}{(x^3)^2}=\frac{3x^4-3}{x^4}=0\Rightarrow x=1 \ \ y \ \ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	–	–	+
Función	C	D	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $(-1,-4)$ mínimo $(1,4)$

Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x}\cdot(x-2)$.
a) Calcula las asíntotas de f.
b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y los valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene, ya que el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} e^{x}(x-2)=\infty \Rightarrow$ No tiene.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x}(x-2)=0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow y=0$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=e^{x}+(x-2)e^{x}=e^{x}(x-1)=0\Rightarrow x=1$$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Signo f'	–	+
Función	D	C

$\downarrow$

mínimo $(1,-e)$

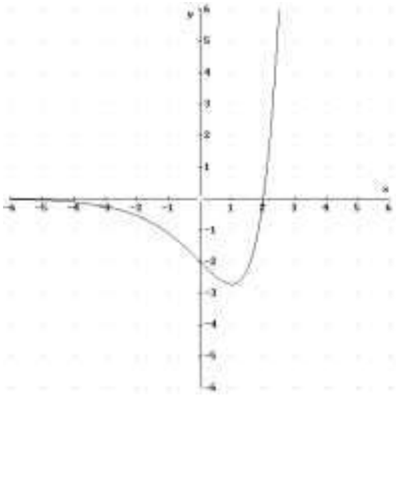
c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=e^{x}(x-1)+e^{x}=e^{x}\cdot x=0\Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo f''	–	+
Función	Cn	Cx

$\downarrow$

P.I. $(0,-2)$

El dibujo de la función sería:



Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot sen\, x - x\cdot e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de *a* y el de dicho limite.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot sen\, x - x\cdot e^x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \cos x - e^x - x\cdot e^x}{2x} = \frac{a-1}{0}$$

Como el limite es finito, se tiene que cumplir que: $a-1=0 \Rightarrow a=1$, para que vuelva a salir $\frac{0}{0}$ y podamos seguir aplicando L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1\cdot sen\, x - x\cdot e^x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot \cos x - e^x - x\cdot e^x}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen\, x - e^x - e^x - x\cdot e^x}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Sea la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e}\,,\,e\right]$.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Los extremos absolutos pueden estar en:

- Las soluciones de $f'(x)=0$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1$$

- En los puntos donde no es continua o no es derivable. En nuestro caso como es continua y derivable, no hay ningún punto.

- En los extremos del intervalo $\left[\frac{1}{e}\,,\,e\right]$. Calculamos los valores de la función en los extremos del intervalo.

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=e-1 \quad ; \quad f(e)=\frac{1}{e}+1$$

Luego, el máximo absoluto está en $\left(\frac{1}{e}\,,\,e-1\right)$ y el mínimo absoluto en $(1\,,\,1)$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=e$ es:

$$y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$$

Calculamos: $f(e)=\frac{1}{e}+\ln e=\frac{1}{e}+1$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(e)=-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e^2}$$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)\Rightarrow y-\frac{1}{e}-1=\frac{e-1}{e^2}(x-e)$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$
a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*
c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de *f* donde ésta corta a la asíntota horizontal.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=-1$ y $x=2$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-x-2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\dfrac{2}{1}=2\Rightarrow y=2$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x^2-x-2)-(2x-1)\cdot 2x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}=0\Rightarrow\ x=0\ ;\ x=-4$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	–	+	+	–	–
Función	D	C	C	D	D

Creciente: $(-4,-1)\cup(-1,0)$

Decreciente: $(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$

c) Calculamos si existe punto de corte de la función con la asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2} \\ y=2 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2x^2}{x^2-x-2}=2\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2$$

Luego, el punto de corte es el $(-2,2)$

Sea la función $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=x^2-8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=2x-\frac{8}{x}=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=-2$$

	$(1,2)$	$(2,e)$
Signo y'	$-$	$+$
Función	D	C

$\downarrow$

mínimo $(2,4-8\ln 2)$

La función tiene un mínimo relativo en $(2,-1'54)$.
Los extremos absolutos pueden estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x=1$ y $x=e$.
Calculamos los valores de la función en estos puntos.

$$f(1)=1$$
$$f(e)=e^2-8\ln e=-0'61$$

Luego, el máximo absoluto está en el punto $(1,1)$ y el mínimo absoluto en el punto $(2,-1'54)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y''=2+\frac{8}{x^2}=0\Rightarrow \text{ No tiene solución}$$

	$(1,e)$
Signo y''	$+$
Función	Cx

Luego, la función es convexa en el intervalo $(1,e)$.

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=e^{x}(x^{2}-x+1)$.
a) Calcula: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
b) Halla los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y los valores que se alcanzan, determinando si son máximos o mínimos).
c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x}(x^{2}-x+1)=0\cdot\infty=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2}-x+1}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\frac{2}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x}(x^{2}-x+1)=\infty$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=e^{x}(x^{2}-x+1)+(2x-1)\cdot e^{x}=e^{x}\left(x^{2}+x\right)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

↓ ↓

Máximo $\left(-1,\frac{3}{e}\right)$ mínimo $(0,1)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$y''=e^{x}(x^{2}+x)+(2x+1)\cdot e^{x}=e^{x}\left(x^{2}+3x+1\right)=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

	$\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$
Signo y''	+	–	+
Función	Cx	Cn	Cx

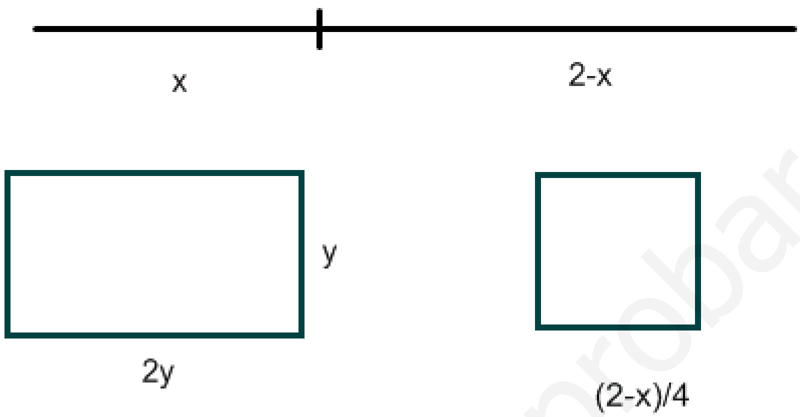
↓ ↓

P.I. P.I.

Luego, en los puntos $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, hay puntos de inflexión, ya que cambia la curvatura.

Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de la altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultante sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min}=\left(\frac{2-x}{4}\right)^2+2y^2$

b) Relación entre las variables: $x=2y+2y+y+y=6y\Rightarrow y=\frac{x}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea mínima con una sola variable.

$$S_{\min}=\left(\frac{2-x}{4}\right)^2+2\left(\frac{x}{6}\right)^2=\frac{17x^2-36x+36}{144}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'=\frac{34x-36}{144}=0\Rightarrow x=\frac{36}{34}=\frac{18}{17}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S''=\frac{36}{144}>0\Rightarrow mínimo$$

Luego, las dimensiones son: $x=\frac{18}{17}m$; $2-x=\frac{16}{17}m$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\ln(x^2+3x+3)-x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}-1=\frac{-x^2-x}{x^2+3x+3}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

$\downarrow$ mínimo $(-1,1)$ $\downarrow$ Máximo $(0,\ln 3)$

b) La recta normal en $x=-2$ es $y-f(-2)=-\frac{1}{f'(-2)}\cdot(x+2)$

$$f(-2)=2$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-x}{x^2+3x+3}\Rightarrow f'(-2)=\frac{-4+2}{4-6+3}=-2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=\frac{1}{2}\cdot(x+2)\Rightarrow y=\frac{x+6}{2}$

Se considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & si \quad x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

Calcula los valores de *a* y *b*.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=1$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 1+\dfrac{a}{x-2}=1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} a+\dfrac{b}{\sqrt{x}}=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow 1-a=a+b \Rightarrow 2a+b=1$$

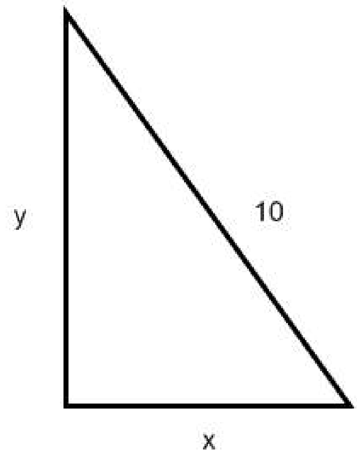
Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{(x-2)^2} & si \quad x<1 \\ -\dfrac{b}{2x\sqrt{x}} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

Como es derivable en $x=1$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-\dfrac{a}{1}=-a \\ f'(1^+)=-\dfrac{b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -a=-\dfrac{b}{2} \Rightarrow b=2a$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=\dfrac{1}{4}$; $b=\dfrac{1}{2}$

De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{max} = \dfrac{x \cdot y}{2}$

b) Relación entre las variables: $x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{max} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{100x^2 - x^4}}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{max} = \frac{\dfrac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}}}{2} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S'' = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} - \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2}$$

$$S''(x = \sqrt{50}) = \frac{-2\sqrt{50}\sqrt{100 - 50} + \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{100 - 50}}}{100 - 50} = \frac{-100 + 1}{50} < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = \sqrt{50}$; $y = \sqrt{50}$

Sea la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+k & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de *k*.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua se cumple que los límites laterales en $x=0$ son iguales, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x+k=k \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\cdot e^{x^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x^2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow k=1$$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

Calculamos: $f(1)=\dfrac{e^1-1}{1}=e-1$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2-2x\cdot(e^{x^2}-1)}{x^4}=\frac{2\cdot e^{x^2}\cdot x^2-2\cdot(e^{x^2}-1)}{x^3}\Rightarrow f'(1)=2e-2e+2=2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-(e-1)=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2+e-1=2x+e-3$$

Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x\neq 1$.
a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función *f*.
b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y los valores que alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=1$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{0}{\infty}=0\Rightarrow y=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1\cdot e^{-x}}{-1}=\infty\Rightarrow NO$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{-1\cdot e^{-x}(1-x)-(-1)\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}=\frac{x\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo f'	–	+	+
Función	D	C	C

Creciente: $(0,1)\cup(1,\infty)$

Decreciente: $(-\infty,0)$

Mínimo: $(0,1)$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+b\,sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula *b* y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\,sen\,x}{x^3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+b\,sen\,x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\,sen\,x+b\cos x}{3x^2}=\frac{1+b}{0}$$

Como dice que es finito, entonces, $1+b=0\Rightarrow b=-1$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\,sen\,x-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x-sen\,x-x\cos x+sen\,x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x-x\cos x}{6x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos-\cos x+x\,sen\,x}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Sea $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ a\sqrt{b-x} & si \quad 0<x<1 \end{cases}$

a) Determina *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable, primero tiene que ser continua en el punto $x=0$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} x+2e^{-x}=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} a\sqrt{b-x}=a\sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow 2=a\sqrt{b}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ -\dfrac{a}{2\sqrt{b-x}} & si \quad 0<x<1 \end{cases}$

Como es derivable en $x=0$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=-\dfrac{a}{2\sqrt{b}} \end{array}\right\} \Rightarrow -1=-\dfrac{a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow 2\sqrt{b}=a$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=2$; $b=1$

b) La recta tangente en $x=0$, es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

- $f(0)=2$
- $f'(x)=1-2e^{-x} \Rightarrow f'(0)=1-2=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-2=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y=-x+2$

La recta normal en $x=0$ es $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)$

Sustituyendo, tenemos: $y-2=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x+2$

Sea g la función definida por $g(x)=\dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x\neq n$.
a) Halla m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la gráfica de g.
b) Determina si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta $y=2x-4$ es la asíntota oblicua de la función, luego:

$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{mx^3}{x^2+n^2-2nx}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx^3}{x^3+n^2x-2nx^2}=\frac{\infty}{\infty}=m\Rightarrow m=2$$

$$-4=\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^3}{x^2+n^2-2nx}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3-2n^2x+4nx^2}{x^2+n^2-2nx}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2n^2x+4nx^2}{x^2+n^2-2nx}=\frac{\infty}{\infty}=4n\Rightarrow n=-1$$

b) La gráfica es simétrica respecto al origen si se cumple que: $-g(x)=g(-x)$.

$$-g(x)=-\frac{2x^3}{(x+1)^2}$$
$$g(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x+1)^2}=-\frac{2x^3}{(-x+1)^2}\neq -g(x)\Rightarrow \text{ No es simétrica respecto al origen.}$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de *f* tiene de abscisa $x=1$ y que *f* tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor -9. Calcula *a, b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Nos dan la función: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \; ; \; f''(x)=6x+2a$$

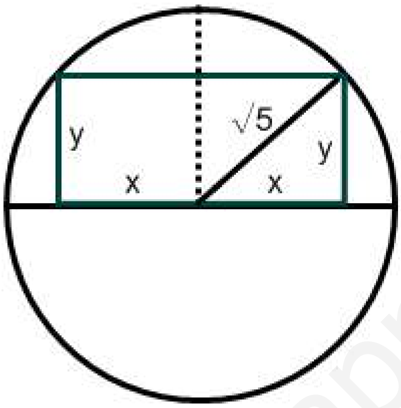
- Punto de inflexión en $x=1 \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow 6\cdot 1+2a=0 \Rightarrow a=-3$

- Mínimo relativo en $(2,-9) \Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (2,-9) \Rightarrow 8-12+c=-9 \Rightarrow c=-5 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 3\cdot 4-12+b=0 \Rightarrow b=0 \end{cases}$

Los valores son: $a=-3$; $b=0$; $c=-5 \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-5$

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $P_{\max} = 4x + 2y$

b) Relación entre las variables: $5 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}$

$$P_{\max} = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$P'_{\max} = 4 + 2\frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$P''_{\max} = \frac{-2\sqrt{5 - x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}}{5 - x^2} \Rightarrow P''_{\max}(x = 2) = -10 < 0 \text{ corresponde a un máximo}$$

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 4\,cm$; altura $= y = 1\,cm$

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \ ; \ f''(x) = 6x + 2a$$

- Punto de inflexión en $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$

- f y la normal pasan por $x = 0 \Rightarrow f(0) = y(0) = -3 \Rightarrow c = -3$.

- La pendiente de la recta normal es $-1 = -\dfrac{1}{f'(0)} \Rightarrow b = 1$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ para $x>0, x\neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0}=\infty\Rightarrow \text{ Asíntota vertical } x=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\infty\Rightarrow \text{No tiene asíntota Horizontal}$$

Asíntota oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \text{ No tiene asíntota oblicua}$$

b) Calculamos : $f(e)=\dfrac{e}{\ln e}=e$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\Rightarrow f'(e)=\frac{\ln e-1}{(\ln e)^2}=0$$

Luego, la recta tangente es: $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)\Rightarrow y-e=0\cdot(x-e)\Rightarrow y=e$

La ecuación de la normal es: $y-f(e)=-\dfrac{1}{f'(e)}\cdot(x-e)\Rightarrow y-e=-\dfrac{1}{0}\cdot(x-e)\Rightarrow x=e$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x\neq a$ y $x\neq\dfrac{1}{2}$.

a) Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una asíntota de dicha gráfica.

b) Para $k=4$ y $a=2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

- Pasa por $(0,2)\Rightarrow 2=\dfrac{k}{(0-a)(0-1)}=\dfrac{k}{a}\Rightarrow k=2a$

- $x=2$ es una asíntota vertical, que son los valores que anulan al denominador, luego $a=2$

Por lo tanto, $a=2$ y $k=4$

b) La función es: $f(x)=\dfrac{4}{(x-2)(2x-1)}=\dfrac{4}{2x^2-5x+2}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{-4(4x-5)}{(2x^2-5x+2)^2}=0\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

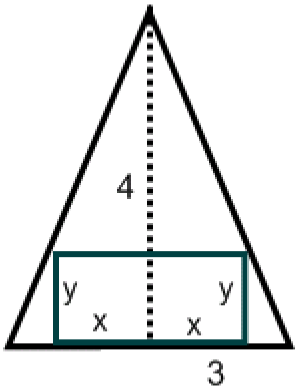
	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{5}{4},2\right)$	$(2,\infty)$
Signo f'	+	+	–	–
Función	C	C	D	D

$\downarrow$

máximo $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{32}{9}\right)$

Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{max} = 2xy$

b) Relación entre las variables: $\frac{4-y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 12 - 3y = 4x \Rightarrow y = \frac{12-4x}{3}$

$$S_{max} = 2xy = 2x\frac{12-4x}{3} = \frac{24x - 8x^2}{3}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{max} = \frac{24-16x}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$S''_{max} = \frac{-16}{3} < 0 \Rightarrow$ corresponde a un máximo independientemente del valor de x

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 3\,m$; altura $= y = 2\,m$

Sea *f* la función definida por $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ para $x\geq -1, x\neq 0$
a) Calcula los límites laterales de *f* en $x=0$.
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

$\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot\frac{1}{e^{\infty}} = 0\cdot 0 = 0$

b)

Asíntota vertical: $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty \Rightarrow$ Asíntota vertical para $x\to 0^+$

$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ No tiene asíntota vertical para $x\to 0^-$

Asíntota horizontal: No tiene

$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty\cdot 1 = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntota Horizontal para $x\to +\infty$

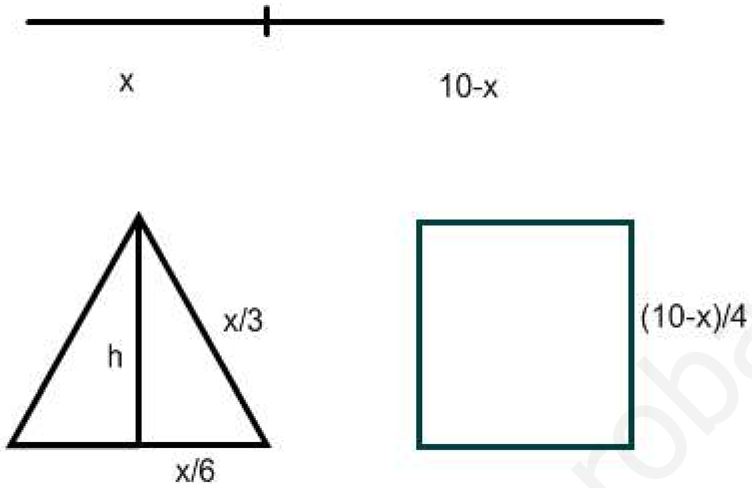
$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty\cdot 1 = -\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota Horizontal para $x\to -\infty$

Asíntota oblicua: $y=x+1$

$m = \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

$n = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.



Calculamos el valor de la altura del triángulo equilátero aplicando Pitágoras:

$$h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{36}}=\sqrt{\frac{3x^2}{36}}=\frac{x\sqrt{3}}{6}$$

a) Función que queremos que sea mínima:

$$S_{\min}=\frac{\frac{x}{3}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2}+\left(\frac{10-x}{4}\right)^2=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\frac{100+x^2-20x}{16}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-180x+900}{144}$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\min}=\frac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)x-180}{144}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x-90}{72}=0\Rightarrow x=\frac{90}{\left(9+4\sqrt{3}\right)}=5'65$$

Luego, las dimensiones de los trozos son: $x=5'65\,m$; $10-x=4'35\ m$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función f definida por $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot 2\ln x}{x^4}=\frac{2x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$$

	$\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{1}{2}},\infty\right)$
Signo f'	+	−
Función	C	D

Creciente: $\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$

Decreciente: $\left(e^{\frac{1}{2}},\infty\right)$

Máximo: $\left(e^{\frac{1}{2}},\frac{1}{e}\right)$

b) Asíntota vertical: Son los valores que anulan al denominador, es decir, $x=0$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow y=0$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene horizontal

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) Halla a, b y c para que la gráfica de *f* tenga un punto de inflexión de abscisa $x=\frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ tenga por ecuación $y=5-6x$.

b) Para $a=3$, $b=-9$ y $c=8$, calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\ ;\ f''(x)=6x+2a$$

- Punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}\Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow 6\cdot\frac{1}{2}+2a=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ tiene de pendiente -6

$$\Rightarrow f'(0)=-6\Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-6\Rightarrow b=-6$$

- La función pasa por el punto $(0,5)\Rightarrow f(0)=5\Rightarrow c=5$

b) Calculamos los máximos y los mínimos de la función: $f(x)=x^3+3x^2-9x+8$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=3x^2+6x-9=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,+\infty)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

Creciente: $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

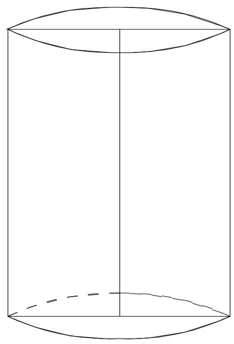
Decreciente: $(-3,1)$

Máximo: $(-3,35)$

Mínimo: $(1,3)$

Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $S_{\min} = \pi r^2 + 2\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 125 \Rightarrow h = \dfrac{125}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{125}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{250}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = 2\pi r - \frac{250}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 250}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = 3'41\ m$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$S''_{\min} = \frac{6\pi r^2 \cdot r^2 - 2r(2\pi r^3 - 250)}{r^4} = \frac{2\pi r^3 + 500r}{r^3}$$

$$S''(r = 3'41) = \frac{2\pi (3'41)^3 + 500(3'41)}{(3'41)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 3'41\ m$ y $h = \dfrac{125}{\pi (3'41)^2} = 3'41\ m$

Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula *a* y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-ax+a}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-a}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-a}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\frac{1-a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1-a=0\Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-1\cdot(x-1)}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2x} & si \quad x<0\\ ax+b & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}ax+b=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^{x}+e^{-x})\cdot 2x-2(e^{x}-e^{-x})}{4x^{2}} & si \quad x<0\\ a & si \quad x\geq 0\end{cases}$

Calculamos $f'(0^-)$ aplicando L'Hôpital:

$$f'(0^-)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{x}+e^{-x})\cdot 2x-2(e^{x}-e^{-x})}{4x^{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x}(2x-2)+e^{-x}(2x+2)}{4x^{2}}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x}(2x-2)+2e^{x}-e^{-x}(2x+2)+2e^{-x}}{8x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2xe^{x}-2xe^{-x}}{8x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^{x}+2xe^{x}-2e^{-x}+2e^{-x}}{8}=\frac{0}{8}=0$$

Calculamos $f'(0^+)$: $f'(0^+)$ =a

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow a=0$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=-1$ es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$$f(-1)=\frac{e^{-1}-e}{-2}=\frac{e^{2}-1}{2e}$$

$$f'(-1)=\frac{(e^{-1}+e)\cdot(-2)-(e^{-1}-e)\cdot 2}{4}=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

Luego la recta tangente en $x=-1$ es $y-\dfrac{e^{2}-1}{2e}=-\dfrac{1}{e}\cdot(x+1)\Rightarrow y=-\dfrac{1}{e}\cdot(x+1)+\dfrac{e^{2}-1}{2e}$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\ln x$ para $x>0$

a) Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la pendiente de la recta tangente es máxima

b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$y'=\frac{-2}{4x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x}$$

$$y''=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$$

El valor $x=0$ no está en el dominio, por lo tanto, sólo sirve el valor $x=1$, es decir, el punto que nos piden es: $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

b) La ecuación de la recta normal en el punto $x=1$, es: $y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

Sustituyendo los valores de $f(1)=\dfrac{1}{2}$ y $f'(1)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$, tenemos:

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}(x-1)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=-2x+2\Rightarrow 4x+2y-5=0$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Halla *b, c* y *d* sabiendo que *f* tiene un máximo relativo en $x=-1$ y que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=3x^2+2bx+c$

- Máximo relativo en $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2b(-1)+c=0\Rightarrow -2b+c=-3$

- $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1}=\frac{1+b+c+d}{0}$

Como nos dicen que el límite existe y vale 4, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1+b+c+d=0$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2bx+c}{1}=3+2b+c=4$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones que hemos obtenido:

$$\left.\begin{array}{r}-2b+c=-3\\ b+c+d=-1\\ 2b+c=\ \ 1\end{array}\right\}\Rightarrow b=1\ ;\ c=-1\ ;\ d=-1$$

Luego, la función es: $f(x)=x^3+x^2-x-1$

Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\ x - sen\, x}{x - sen\, x}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - senx}{x - sen\, x} = \dfrac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - senx}{x - sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \cdot sen\, x}{-2\cos x \cdot sen\, x + 3\cos^2 x \cdot sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x}{-2\cos x + 3\cos^2 x} = \frac{3}{-2+3} = 3$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y = 0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

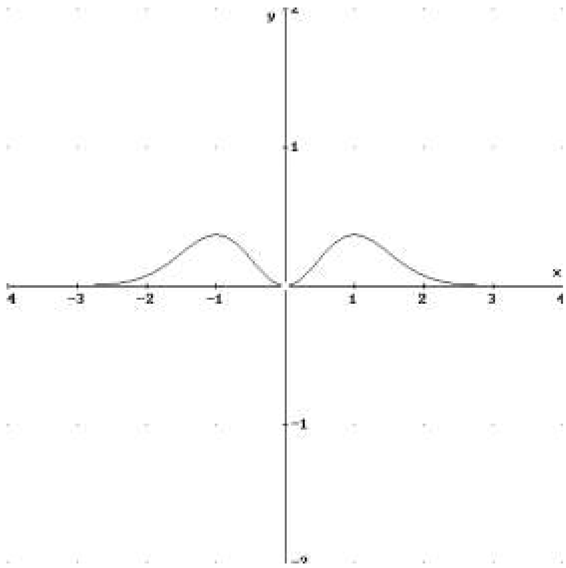
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{2x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot e^{x^2} \cdot x^2}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 1 \ ; \ x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y'	+	—	+	—
Función	C	D	C	D

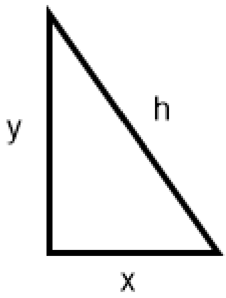
$\downarrow$ Máximo $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ $\quad\downarrow$ mínimo $(0, 0)$ $\quad\downarrow$ Máximo $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

c)



De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $h=\sqrt{x^2+y^2}$.

b) Relación entre las variables: $8=\dfrac{x\cdot y}{2}\Rightarrow y=\dfrac{16}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$h=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}$$

d) Derivamos e igualamos a cero: $h'=\dfrac{\dfrac{4x^3\cdot x^2-2x(x^4+256)}{x^4}}{2\sqrt{\dfrac{x^4+256}{x^2}}}=\dfrac{x^4-256}{x^2\sqrt{x^4+256}}=0\Rightarrow x=\pm 4$

Como es una longitud tomamos el valor positivo $x=4$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$h''=\frac{4x^3\cdot\left(x^2\sqrt{x^4+256}\right)-\left(2x\cdot\sqrt{x^4+256}+x^2\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+256}}\right)\cdot(x^4-256)}{x^4(x^4+256)}$$

$$h''(x=4)=\frac{256\cdot\left(16\sqrt{512}\right)-\left(8\cdot\sqrt{512}+\dfrac{4096}{2\sqrt{512}}\right)\cdot 0}{256\cdot 512}>0\Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones de los catetos son: $x=4\ cm$; $y=4\ cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función derivable definida por: $f(x)=\begin{cases} a-x & si\ \ x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}+\ln x & si\ \ x>1 \end{cases}$ donde ln denota el logaritmo neperiano
a) Calcula a y b.
b) Para $a=3$ y $b=2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x=1$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} a-x=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{b}{x}+\ln x=b \end{array}\right\}\Rightarrow a-1=b\Rightarrow a-b=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si\quad x\le 1 \\ -\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{1}{x} & si\quad x>1 \end{cases}$

Como es derivable en $x=1$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-1 \\ f'(1^+)=-b+1 \end{array}\right\}\Rightarrow -1=-b+1\Rightarrow b=2$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a-b=1\Rightarrow a=1+2=3$

b) Como es derivable, los extremos absolutos se encuentran en $x=0$, $x=e$ y en los puntos donde se anula $f'(x)$.

- $f'(0)=-1\neq 0\Rightarrow$ No puede haber máximo o mínimo

- $f'(0)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$

- $x=0\Rightarrow f(0)=3$

- $x=2\Rightarrow f(2)=1+\ln 2$

- $x=e\Rightarrow f(e)=\dfrac{2}{e}+1$

Luego, el mínimo absoluto está en el punto $(2,1+\ln 2)$ y el máximo absoluto en el punto $(0,3)$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^{x}+ax}{x\,sen(x)}$ es finito, calcula *a* y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^{x}+ax}{x\,sen(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\,sen3x-e^{x}+a}{sen\,x+x\cos x} = \frac{-1+a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y, es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $-1+a=0 \Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^{x}+x}{x\,sen(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\,sen3x-e^{x}+1}{sen\,x+x\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x-e^{x}}{\cos x+\cos x-x\,sen\,x} = \frac{-10}{2} = -5$$

De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.
MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x}$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\min} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = -1$$

c) Comprobamos el valor que corresponde a un mínimo.

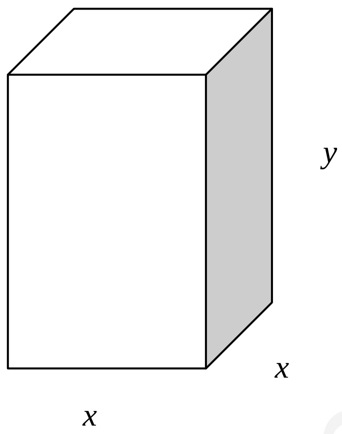
$$S''_{\min} = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$S''_{\min}(x=1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, el número que nos piden es: $x=1$

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13’5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $S = x^2 + 4xy$

b) Relación entre las variables: $x^2 \cdot y = 13'5 \Rightarrow y = \dfrac{13'5}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{13'5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo.

$$S'' = \frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3 - 54)}{x^4} = \frac{6x^3 - 4x^3 + 108}{x^3} = \frac{2x^3 + 108}{x^3} \Rightarrow S''(x = 3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $x = 3\ m$; $y = 1'5\ m$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de *a* y *b*.

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen\,x}{2x\cdot\cos x^2}=\frac{0+b+0}{0}$$

Como dice que es finito, entonces, $b=0$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen\,x}{2x\cdot\cos x^2}=\frac{0+b+0}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cdot\cos x^2-2x\cdot 2x\cdot sen\,x^2}=\frac{2a+1}{2}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a+1=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

Luego, los valores son: $a=\frac{1}{2}$; $b=0$

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28.800 euros.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $28.800 = 80x + 10x + 20y \Rightarrow y = \dfrac{28.800 - 90x}{20} = \dfrac{2880 - 9x}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot \frac{2880 - 9x}{2} = \frac{2880x - 9x^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = \frac{2880 - 18x}{2} = 0 \Rightarrow x = 160 \ m$$

e) Comprobamos que es un máximo

$$S''(x) = -9 \Rightarrow S''(160) = -9 < 0 \Rightarrow máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = 160 \ m \ ; \ \ y = 720 \, m$

Determina *a* y *b* sabiendo que $b > 0$ y que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 2x & si \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es derivable. (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x = 0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} a\cos x + 2x = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} = b \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -a\, sen\, x + 2 & si \quad x < 0 \\ a^2 \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{b}{(x+1)^2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Como es derivable en $x = 0$, se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = a^2 - b \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 - b = 2$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{r} a = b \\ a^2 - b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 - b = 2 \Rightarrow b = -1 \, ; \, b = 2$$

Como nos dicen que $b > 0$, entonces los valores pedidos son: $a = b = 2$

Halla *a* y *b* sabiendo que es continua la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\cos(x)-ae^{x}}{x^{2}} & si \quad x\neq 0 \\ b & si \quad x=0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua, estudiamos la continuidad en $x=0$

- $f(0)=b$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cos x-ae^{x}}{x^{2}}=\dfrac{1-a}{0}$ Como el limite debe existir, ya que es continua, el numerador debe valer cero para poder aplicar la regla de L'Hôpital, luego $1-a=0\Rightarrow a=1$.

Aplicamos la regla de L'Hôpital para calcular el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x-1\cdot e^{x}}{x^{2}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-sen\,x-e^{x}}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos-e^{x}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1=f(0)=b\Rightarrow b=-1$.

Luego, $a=1$; $b=-1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x^2+3x+1)\cdot e^{-x}$. **a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.** **b) Halla los puntos de la gráfica de *f* cuya recta tangente es horizontal.** **c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.** **MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$ cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)=\lim_{x\to+\infty}((-x)^2+3(-x)+1)\cdot e^{-(-x)}=\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+1)\cdot e^x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Por lo tanto, no tiene asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{(2x+3)\cdot e^x-(x^2+3x+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x^2-x+2}{e^x}=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=1$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
Signo y'	—	+	—
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$

mínimo $(-2,-e^2)$ Máximo $(1,5e^{-1})$

Luego, los puntos donde la tangente es horizontal son: $(-2,-e^2)$ y $(1,5e^{-1})$.

c) La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=1$
$f'(0)=2$

Luego la recta tangente en $x=0$ es $y-1=2\cdot(x-0)\Rightarrow y=2x+1$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x-1}$ para $x\neq 1$.
a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{e^{\infty}}{\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{e^{-\infty}}{\infty}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow y=0$$

Luego, y = 0 es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

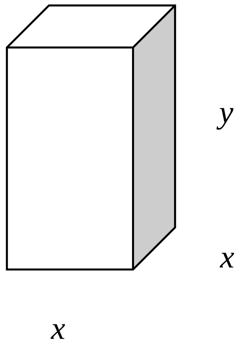
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{e^{x}(x-2)}{(x-1)^{2}}=0\Rightarrow x=2$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	—	—	+
Función	D	D	C

$\downarrow$ No existe $\quad\downarrow$ mínimo $(2,e^{2})$

Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $V_{max} = x^2 \cdot y$

b) Relación entre las variables: $60 = y + 4x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{max} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (60 - 4x) = 60x^2 - 4x^3$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V' = 120x - 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 10$$

e) Comprobamos que es un máximo.

$$V'' = 120 - 24x \Rightarrow V''(x = 10) = 120 - 240 = -120 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = 10\,cm \ ; \ y = 20\,cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Halla los coeficientes *a, b, c* y *d* sabiendo que *f* presenta un extremo local en el punto de abscisa $x=0$, que $(1,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de *f* y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

- *f* tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=0\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0$.

- El punto (1,0) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*

$$\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (1,0)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0\Rightarrow a+b+d=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a\cdot 1+2b=0\Rightarrow 6a+2b=0\end{cases}$$

- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ tiene de pendiente -3

$$\Rightarrow f'(1)=-3\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-3\Rightarrow 3a+2b=-3$$

Resolviendo el sistema resulta: $a=1$; $b=-3$; $c=0$; $d=2\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-|x|$.
a) Estudia la derivabilidad de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $f(x)=x^2-|x|=\begin{cases} x^2+x & si \quad x<0 \\ x^2-x & si \quad x\ge 0\end{cases}$

Las funciones x^2+x y x^2-x por ser polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. En el único punto donde puede haber problemas es en $x=0$, que es el punto donde cambiamos de una a otra. Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x=0$:

1) $f(0)=0$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0 \\ \lim_{x\to 0^+}(x^2-x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$

3) $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$

Por lo tanto, la función es continua en $x=0$

Estudiamos ya la derivabilidad de $f(x)$, en particular en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ 2x-1 & si \quad x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\ \ 1 \\ f'(0^+)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

b y c) Igualamos a cero la primera derivada:

$$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Signo y'	—	+	—	+
Función	D	C	D	C

$\downarrow$ m $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ $\downarrow$ Pico $(0,0)$ $\downarrow$ m $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

Halla los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x=1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Las asíntotas verticales son los valores que anulan el denominador, luego:

$$x+c=0\Rightarrow 1+c=0\Rightarrow c=-1.$$

Como f tiene una asíntota oblicua con pendiente 2, tenemos que:

$$2\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{2}=2\Rightarrow a=2$$

Calculamos la derivada de $f(x)=\dfrac{2x^2+b}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x-1)-1\cdot(2x^2+b)}{(x-1)^2}$$

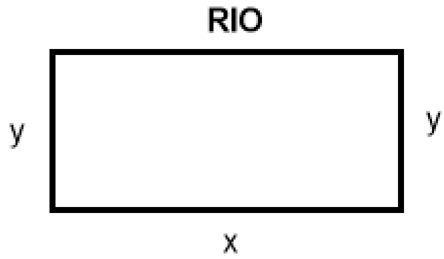
Como tiene un extremo local en $x=3\Rightarrow f'(3)=0$, luego:

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x-1)-1\cdot(2x^2+b)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{4\cdot 3\cdot(3-1)-1\cdot(2\cdot 3^2+b)}{(3-1)^2}=0\Rightarrow \frac{24-18-b}{4}=0\Rightarrow b=6$$

Luego, los valores son: $a=2$; $b=6$; $c=-1$

Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180.000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al rio no necesita vallado?.
MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $P_{\min} = x + 2y$

b) Relación entre las variables: $x \cdot y = 180.000 \Rightarrow y = \dfrac{180.000}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = x + 2y = x + 2 \cdot \frac{180.000}{x} = x + \frac{360.000}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = 1 - \frac{360.000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{360.000} = \pm 600$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$P'' = \frac{2x \cdot 360.000}{x^4} = \frac{720.000}{x^3} \Rightarrow P''(x = 600) = \frac{1}{300} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = 600\ m$; $y = \dfrac{600}{2} = 300\ m$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen\,x+x\cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula *a* y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen\,x+x\cos(3x)}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-a\cos x+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{1-a+1}{0}\Rightarrow a=2$$

Como dice que es finito, entonces, $a=2$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-2\cos x+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+2sen\,x-3\,sen(3x)-3\,sen(3x)-9x\cos(3x)}{2}=-\frac{1}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de *f*.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento *f* y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$

Asíntotas Verticales: No tiene, ya que no hay ningún valor que anule el denominador

Asíntotas Horizontales: Calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

Por lo tanto, $y=0$, es la asíntota horizontal

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

Calculamos el punto de corte de la asíntota con la función.

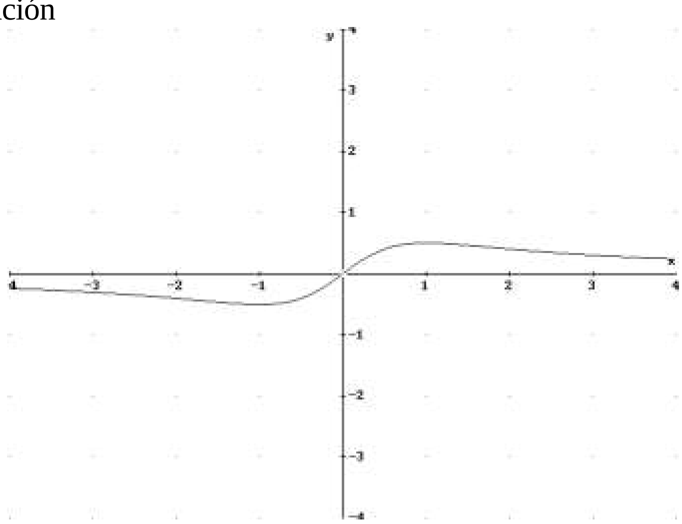
$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{x^2+1} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x=0\Rightarrow P(0,0)$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	—	+	—
Función	D	C	D

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en el intervalo $(-1,1)$. Tiene un máximo relativo en el punto $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

c) Representamos la función



Sabiendo que $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi x)\cdot(1+a\cos(\pi x))}{sen(x^2)}$ **es finito, calcula** a **y el valor del límite.**

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi x)\cdot(1+a\cos(\pi x))}{sen(x^2)}=\frac{1\cdot(1+a)}{0}$$

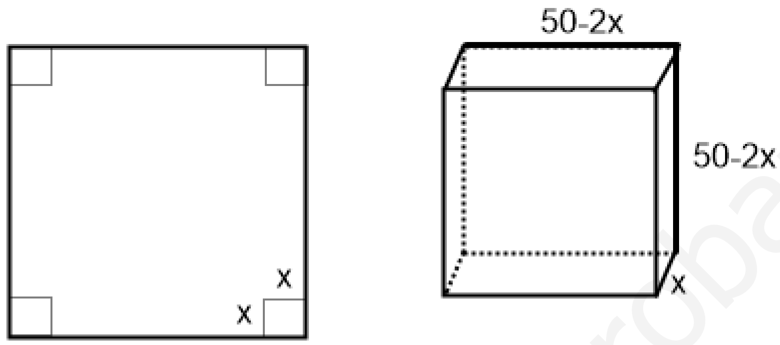
Como dice que es finito, entonces, $a=-1$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi x)\cdot(1+a\cos(\pi x))}{sen(x^2)}=\frac{1\cdot(1-1)}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\pi\, sen(\pi x)\cdot(1-\cos(\pi x))+\cos(\pi x)\cdot\pi sen(\pi x)}{2x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\pi^2\cos\pi x\cdot(1-\cos\pi x)+sen\,\pi x\cdot(-\pi\cdot sen\,\pi x)-\pi\cdot sen^2\,\pi x\cdot\pi\cdot sen\,\pi^2 x+\cos\pi x\cdot\pi\quad\cos\pi x}{2\cos(x^2)-4x^2\, sen(x^2)}=\frac{\pi}{2}$$

Se dispone de un cartón cuadrado de 50 cm de lado para construir una caja sin tapadera a partir del cartón. Para ello, se corta un cuadrado de x cm de lado en cada una de las esquinas. Halla el valor de *x* para que el volumen de la caja sea máximo y calcula dicho volumen.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) La función que queremos que sea mínimo es: $V=(50-2x)^2\cdot x=4x^3-200x^2+2500x$

b) Derivamos e igualamos a cero

$$V'=12x^2-400x+2500=0\Rightarrow x=25\ ;\ x=\frac{25}{3}$$

c) Calculamos la 2ª derivada y comprobamos el máximo

$V''=24x-400$

$V''(x=25)=200\Rightarrow$ mínimo. Es absurdo, ya que si quitamos en cada esquina un cuadrado de 25 cm de lado nos quedamos sin cartón para hacer la caja.

$V''\left(\frac{25}{3}\right)=-200\Rightarrow$ Máximo

Luego, $x=\frac{25}{3}cm$

Calculamos el volumen: $V=(50-2x)^2\cdot x=\left(50-2\cdot\frac{25}{3}\right)^2\cdot\frac{25}{3}=9.259'26\ cm^3$

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, donde ln denota logaritmo neperiano.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty \Rightarrow \text{Asíntota vertical } x=0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \text{Asíntota horizontal } y=0$$

No tiene asíntota oblicua ya que tiene horizontal

a) Calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$$

	(0,e)	(e,+ ∞)
Signo y'	+	—
Función	C	D

$$\downarrow$$

Máximo $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$

Creciente: $(0,e)$

Decreciente: $(e,+\infty)$

Máximo relativo: $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina *a, b, c* sabiendo que la gráfica de *f* tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x=1$ y un punto de inflexión en $(-1,5)$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Nos dan la función: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \ ; \ f''(x)=6x+2a$$

- Tangente horizontal en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3\cdot 1^2+2a+b=0\Rightarrow 2a+b+3=0$

- Punto de inflexión en $(-1,5)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (-1,5)\Rightarrow(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+c=5\Rightarrow a-b+c-6=0 \\ f''(-1)=0\Rightarrow 6\cdot(-1)+2a=0\Rightarrow 2a-6=0\end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b+3=0 \\ a-b+c-6=0 \\ 2a-6=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=3\ ;\ b=-9\ ;\ c=-6$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(e^{ax}+b)x$, con $a\neq 0$. Calcula *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en $x=0$ y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de $f(x)=(e^{ax}+b)x$

$$f'(x)=ae^{ax}\cdot x+e^{ax}+b \ ; \ f''(x)=a^2e^{ax}\cdot x+ae^{ax}+ae^{ax}=a^2e^{ax}\cdot x+2ae^{ax}=ae^{ax}(ax+2)$$

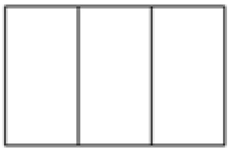
Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Extremo relativo en $x=0\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow 1+b=0$

- Punto de inflexión en $x=1\Rightarrow f''(1)=0\Rightarrow ae^{a}(a+2)=0$

Resolviendo las dos ecuaciones, tenemos: $a=-2$; $b=-1$

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x a la longitud e y al ancho del solar.

Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $L_{\min} = 2x + 4y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $x \cdot y = 12.800$; $y = \dfrac{12.800}{x}$

Paso 3: Sustituimos: $L_{\min} = 2x + 4y = 2x + 4 \cdot \dfrac{12.800}{x} = 2x + \dfrac{51.200}{x}$

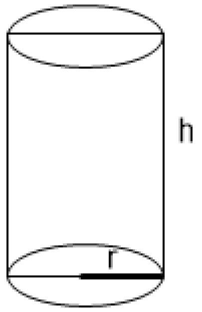
Paso 4: Derivamos e igualamos a cero: $L'_{\min} = 2 - \dfrac{51.200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 160$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada.

$$L'' = \frac{102.400}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} L''(x=160) = 0'025 \Rightarrow \textit{mínimo} \\ L''(x=-160) = -0'025 \Rightarrow \textit{Máximo} \end{cases}$$

Luego las dimensiones del solar son x = 160 m ; y = 80 m

Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.



a) Función que queremos que sea máximo es: $S_{\min} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 1.000 \Rightarrow h = \dfrac{1.000}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1.000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = 4\pi r - \frac{2.000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2.000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2.000}{4\pi}} = 5'41\ cm$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$S''_{\min} = \frac{12\pi r^2 \cdot r^2 - 2r(4\pi r^3 - 2000)}{r^4} = \frac{4\pi r^3 + 4000}{r^3}$$

$$S''(r = 5'41) = \frac{4\pi(5'41)^3 + 4000}{(5'41)^3} > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 5'41\ cm$ y $h = \dfrac{1000}{\pi(5'41)^2} = 10'87\ cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\left|x^2-4\right|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

a) Lo primero que hacemos es abrir la función.

$$f(x)=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x\le -2 \\ 4-x^2 & si \quad -2<x<2 \\ x^2-4 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Igualamos a cero la primera derivada:

$$2x=0\Rightarrow x=0$$
$$-2x=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	—	+	—	+
Función	D	C	D	C

$\downarrow$ Pico $(-2,0)$ $\downarrow$ Máximo $\downarrow$ Pico $(2,0)$

Creciente en el intervalo: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

Decreciente en el intervalo: $(-\infty,2)\cup(0,2)$

Máximo en $(0,4)$ y mínimos en $(-2,0)$ y $(2,0)$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente.

$$y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)\Rightarrow y-3=2(x+1)\Rightarrow y=2x+5$$

La ecuación de la normal es

$$y-f(-1)=-\frac{1}{f'(-1)}f'(-1)\cdot(x+1)\Rightarrow y-3=-\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow x+2y-5=0$$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Aplicamos la regla de L'Hôpital y como el límite es finito el numerador debe valer cero

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{2x-me^x+m}{2x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2xe^x}\Rightarrow 2-me^x=0\Rightarrow m=2$$

Calculamos el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{2x-me^x+m}{2x(e^x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2xe^x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-me^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}=\frac{-m}{4}=-\frac{1}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

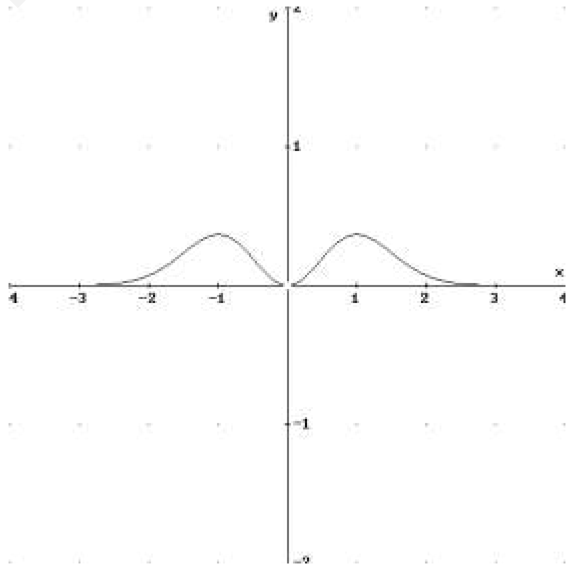
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot e^{x^2}-2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2}{(e^{x^2})^2}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1\ ;\ x=-1$$

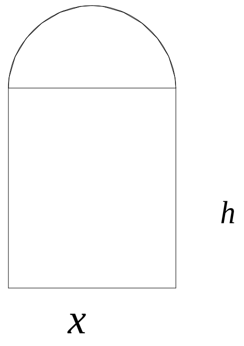
	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	—	+	—
Función	C	D	C	D

Máximo $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$ mínimo $(0,0)$ Máximo $\left(1,\frac{1}{e}\right)$

c)



Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base *x* para que el perímetro sea mínimo.



MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $P_{\min} = x + 2h + \pi \dfrac{x}{2} = 2h + \left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)x$

b) Relación entre las variables: $16 = x \cdot h + \dfrac{\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow 16 = x \cdot h + \dfrac{\pi x^2}{8} \Rightarrow h = \dfrac{128-\pi x^2}{8x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = 2h + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x = 2\cdot\frac{128-\pi x^2}{8x} + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x = \frac{128-\pi x^2}{4x} + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x = \frac{128+(\pi+4)x^2}{4x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = \frac{2\cdot(\pi+4)x\cdot 4x - 4\cdot\left(128+(\pi+4)x^2\right)}{16x^2} = \frac{4\cdot(\pi+4)x^2-512}{16x^2} = \frac{(\pi+4)x^2-128}{4x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{128}{(\pi+4)}}$$

e) Calculamos la segunda derivada:

$$P'' = \frac{2\cdot(\pi+4)x\cdot 4x^2 - 8x\cdot\left((\pi+4)x^2-128\right)}{16x^4} = \frac{128}{2x^3} = \frac{64}{x^3}$$

$$P''\left(x = \sqrt{\frac{128}{(\pi+4)}}\right) > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, el valor de la base es: $x = \sqrt{\dfrac{128}{(\pi+4)}} = 4'23\ m$

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x\neq 1$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x+1$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1}\right]=1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot(x-1)-1\cdot x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,0)$ $\downarrow$ mínimo $(2,4)$

Creciente: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
Decreciente: $(0,2)$
Máximo $(0,0)$
mínimo $(2,4)$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & si \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si \quad x\ge\pi \end{cases}$$

es continua.
a) Determina *a* y *b*.
b) Estudia la derivabilidad de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $3x+2$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $x^2+2a\cos x$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función ax^2+b es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, sólo estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$ y $x=\pi$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} 3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+2a\cos x=2a \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$$

Estudiamos la continuidad en $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \pi^-} x^2+2a\cos x=\pi^2-2 \\ \lim\limits_{x\to \pi^+} ax^2+b=\pi^2+b \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^+} f(x)=f(\pi)\Rightarrow \pi^2-2=\pi^2+b\Rightarrow b=-2$$

b)

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x<0 \\ 2x-2\,sen\,x & si \quad 0<x<\pi \\ 2x & si \quad x>\pi \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=3 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+)\Rightarrow No\ derivable$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=2\pi \\ f'(\pi^+)=2\pi \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=2\pi\Rightarrow derivable$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{sen\, x} \right)$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{sen\, x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\, x - x \cos x}{x\, sen\, x} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\, sen\, x}{sen\, x + x \cos x} = \frac{0}{0} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-sen\, x + sen\, x + sen\, x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x\, sen\, x} = \frac{0}{2} = 0$$

Se considera la función *f* dada por $f(x)=\dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ para $x\neq 1$.
a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+2}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-6x}{1}=-\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=-3x-3$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-3x^2+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{2}=-3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x^2+2}{x-1}+3x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x^2+2+3x^2-3x}{x-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x+2}{x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{1}\right]=-3$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{-6x\cdot(x-1)-1\cdot(-3x^2+2)}{(x-1)^2}=\frac{-3x^2+6x-2}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$	$\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
Signo y'	–	+	+	–
Función	D	C	C	D

Creciente: $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

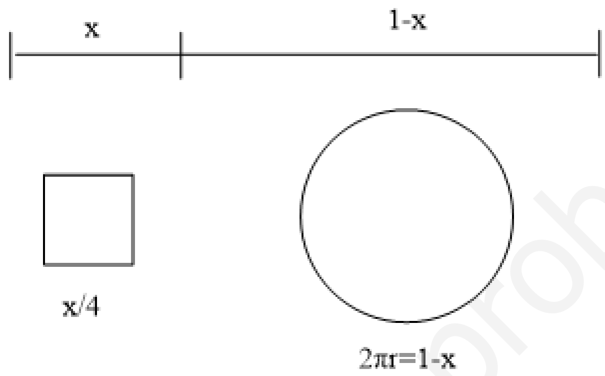
Decreciente: $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

Máximo: $(1'57,-9'46)$

Mínimo: $(0'42,-2'53)$

Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.
Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = \frac{x^2}{16} + \pi \frac{(1-x)^2}{4\pi^2} = \frac{\pi x^2 + 4 + 4x^2 - 8x}{16\pi}$

b) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = \frac{2\pi x + 8x - 8}{16\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{4+\pi}$$

Lado del cuadrado $\frac{x}{4} = \frac{1}{4+\pi}$

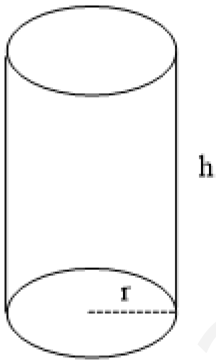
Radio de la circunferencia $\frac{1-x}{2\pi} = \frac{1 - \frac{4}{4+\pi}}{2\pi} = \frac{1}{8+2\pi}$

Luego, el lado del cuadrado es el doble del radio de la circunferencia.

Las longitudes de los trozos son: $x = \frac{4}{4+\pi}$; $1-x = \frac{\pi}{4+\pi}$

Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de $20\pi\ m^3$. El material para las tapas cuesta 10 euros cada m^2 y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m^2. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo es: $C_{\min} = 2\pi r^2 \cdot 10 + 2\pi r h \cdot 8 = 20\pi r^2 + 16\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 20\pi \Rightarrow h = \dfrac{20\pi}{\pi r^2} = \dfrac{20}{r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$C_{\min} = 20\pi r^2 + 16\pi r \cdot \frac{20}{r^2} = 20\pi r^2 + \frac{320\pi}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$C'_{\min} = 40\pi r - \frac{320\pi}{r^2} = \frac{40\pi r^3 - 320\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2\ m$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$C''_{\min} = \frac{120\pi r^4 - 2r(40\pi r^3 - 320\pi)}{r^4} = \frac{40\pi r^3 + 640\pi}{r^3}$$

$$C''_{\min}(r=2) = \frac{40\pi(2)^3 + 640\pi}{(2)^3} > 0 \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 2\ m$ y $h = 5\ m$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula *a*; *b*; c y *d* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en $(0,1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1,-1)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

- Extremo relativo en $(0,1)$ $\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (0,1)\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=1\Rightarrow d=1 \\ f'(0)=0\Rightarrow 3a\cdot 0+2b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0 \end{cases}$

- Punto de inflexión en $(1,-1)\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (1,-1)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot+d=-1\Rightarrow a+b=-2 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a\cdot 1+2b=0\Rightarrow 6a+2b=0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema resulta: $a=1$; $b=-3$

Luego: $a=1$; $b=-3$; $c=0$; $d=1\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+1$

Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto $(0,2)$ y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es la recta $x+y=3$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \; ; \; f''(x)=6ax+2b$$

- Extremo relativo en $(0,2)$ $\Rightarrow \begin{cases} Pasa\ por\ (0,2) \Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=2 \Rightarrow d=2 \\ f'(0)=0 \Rightarrow 3a\cdot 0+2b\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0 \end{cases}$

- Pasa por $(1,2) \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow a+b+c+d=2 \Rightarrow a+b+0+2=2 \Rightarrow a+b=0$

- La tangente en $x=1$ tiene de pendiente -1

$$\Rightarrow f'(1)=-1 \Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-1 \Rightarrow 3a+2b+0=-1 \Rightarrow 3a+2b=-1$$

Resolviendo el sistema resulta: $a=-1$; $b=1$

Luego: $a=-1$; $b=1$; $c=0$; $d=2 \Rightarrow f(x)=-x^3+x^2+2$

Considera la función definida por $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2}$ para $x \neq 0$.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntotas Verticales: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{-x^3+4}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2}{2x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{-6x}{2} = -\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y = -x$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-x^3+4}{x^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^3+4}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{-6x}{6x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{-6}{6} = -1$$

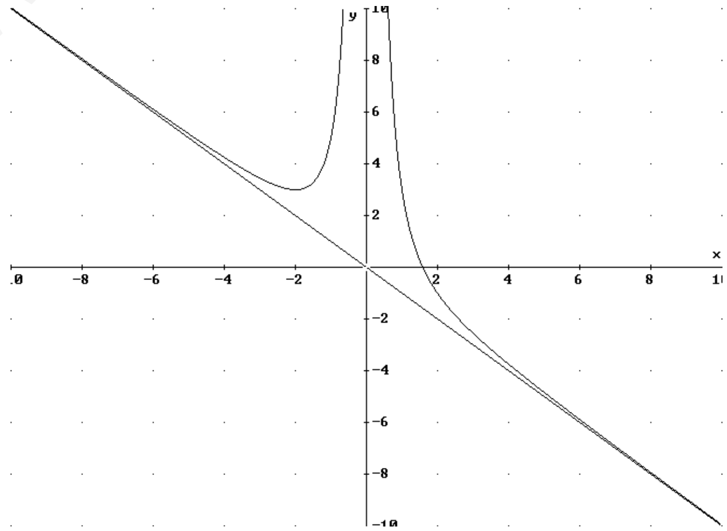
$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-x^3+4}{x^2} + x \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-x^3+4+x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{4}{x^2} \right] = 0$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y' = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - 2x(-x^3+4)}{x^4} = \frac{-x^3-8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$$

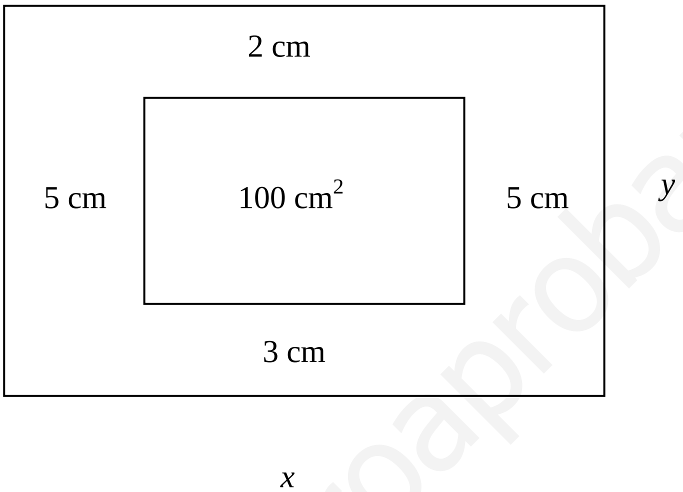
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
Signo y'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

Creciente: $(-2, 0)$
Decreciente: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
Mínimo: $(-2, 3)$
c)



Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno. Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Paso 1: Escribimos la función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x \cdot y$

Paso 2: Escribimos la relación entre las variables: $100 = (x-10)\cdot(y-5) \Rightarrow y = \dfrac{50+5x}{x-10}$

Paso 3: Sustituimos: $S_{\min} = x \cdot y = x \cdot \dfrac{50+5x}{x-10} = \dfrac{50x+5x^2}{x-10}$

Paso 4: Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = \frac{5x^2-100x-500}{(x-10)^2} = 0 \Rightarrow 5x^2-100x-500 = 0 \Rightarrow x = 24'14 \ ; \ x = -4'14$$

Como es una longitud, el valor es: $x = 24'14$

Paso 5: Calculamos la 2ª derivada y comprobamos que corresponde a un mínimo.

$$S'' = \frac{2000}{(x-10)^3} \Rightarrow S''(x = 24'14) = 0'70 \Rightarrow mínimo$$

Luego las dimensiones de la tarjeta son: $x = 24'14\ cm$; $y = 12'07\ cm$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
a) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow e^{x}-e^{-x}=0\Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	—	+
Función	D	C

$\downarrow$
mínimo $(0,1)$

La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(0,1)$

b) Calculamos $f(0)=1$ y $f'(0)=0$

La recta normal en $x=0$ es: $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=-\dfrac{1}{0}(x-0)\Rightarrow x=0$

Halla los coeficientes *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$..

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si no es extremo relativo, será un punto de inflexión, luego: $f''(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1\Rightarrow 1+a+b+c=1 \\ f'(1)=0\Rightarrow 3+2a+b=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6+2a=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-3\ ;\ b=3\ ;\ c=0$$

Luego la función es: $f(x)=x^3-3x^2+3x$

Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable, también es continua. Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 - k \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2}{kx}\right) = \dfrac{2}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2 \ ; \ k = 1$$

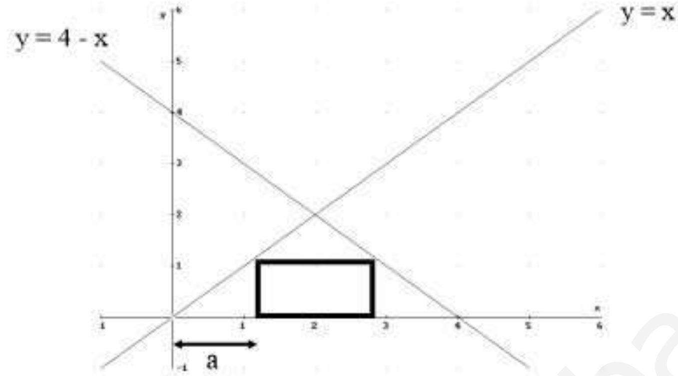
Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x \leq 1 \\ -\dfrac{2}{kx^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Y como es derivable, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -2k \\ f'(1^+) = -\dfrac{2}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -2k = -\frac{2}{k} \Rightarrow k = \pm 1$$

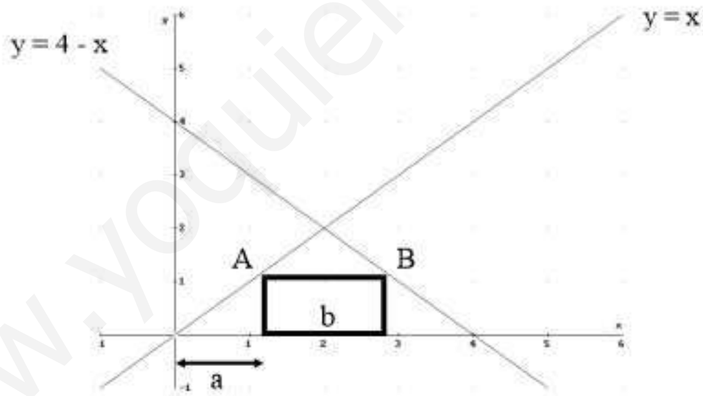
Luego, el único valor posible es $k = 1$:

Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:
a) Halla la altura del rectángulo en función de *a* (ver figura).
b) Halla la base del rectángulo en función de *a*.
c) Encuentra el valor de *a* que hace máximo el área del rectángulo.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) El vértice A tiene de coordenadas (a,a), ya que es un punto de la recta $y = x$. Por lo tanto, la altura del rectángulo es a.

b) El vértice B tiene de coordenadas $(b+a,a)$, y como es un punto de la recta $y = 4 - x$, se cumple que: $a = 4-(b+a) \Rightarrow b = 4-2a$.

c) La función que queremos que sea máximo es: $S_{max} = (4-2a)\cdot a = 4a - 2a^2$

Derivamos e igualamos a cero: $S'_{max} = 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1$

Luego, el área es máxima cuando $a = 1$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} -x\,e^{x-1} & si \quad x\le 0 \\ x\,e^{x-1} & si \quad 0<x\le 1 \\ x\,e^{1-x} & si \quad 1<x \end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=0$ y en $x=1$.
b) Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Primero estudiamos la continuidad de la función.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} -x e^{x-1}=0 \\ \lim_{x\to 0^+} x e^{x-1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} x e^{x-1}=1 \\ \lim_{x\to 1^+} x e^{1-x}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(1)\Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}(-1-x) & si \quad x<0 \\ e^{x-1}(1+x) & si \quad 0<x<1 \\ e^{1-x}(1-x) & si \quad 1<x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=e^{-1}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{e} \\ f'(0^+)=e^{-1}\cdot(1)=\dfrac{1}{e} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=e^{0}\cdot 2=2 \\ f'(1^+)=e^{0}\cdot 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\ne f'(1^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

b) Calculamos las asíntotas horizontales

$\lim_{x\to -\infty} -x e^{x-1}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to -\infty}\dfrac{-x}{e^{1-x}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\dfrac{-1}{-e^{1-x}}=\dfrac{1}{\infty}=0\Rightarrow$ $y=0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$

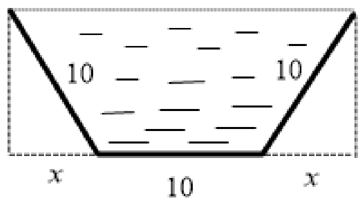
$\lim_{x\to +\infty} x e^{1-x}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^{x-1}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{e^{x-1}}=\dfrac{1}{\infty}=0\Rightarrow$ $y=0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:

a) Halla la altura de la canaleta en función de *x* (ver la figura).

b) Halla el área de la sección de la canaleta en función de *x*.

c) Encuentra el valor de *x* que hace máximo dicho área.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Aplicando Pitágoras, vemos que $h=\sqrt{100-x^2}$

b) Área de la canaleta = Área del rectángulo – 2 Área del triángulo

$$S=(10+2x)\cdot\sqrt{100-x^2}-2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{100-x^2}=(10+x)\cdot\sqrt{100-x^2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero

$$S'=\sqrt{100-x^2}+(10+x)\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2-10x+100=0\Rightarrow x=5\ ;\ x=-10$$

Luego, el máximo es para $x=5\ \ cm$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ para $x\neq 1$.
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de *f* indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{e^{\infty}}{\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{e^{-\infty}}{\infty}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow y=0$$

Luego, $y=0$ es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=2$

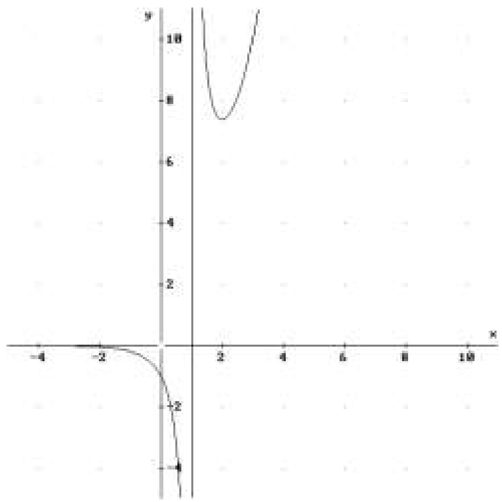
	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	—	—	+
Función	D	D	C

$\downarrow$ No existe $\quad\downarrow$ mínimo $(2,e^2)$

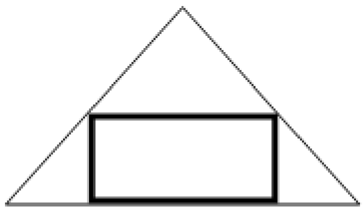
Creciente: $(2,+\infty)$. Decreciente: $(-\infty,1)\cup(1,2)$. Mínimo en $(2,e^2)$

c) Corte con el eje X: $y=0\Rightarrow e^x=0\Rightarrow$ No corta

Corte con el eje Y: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{e^0}{-1}=-1\Rightarrow(0,-1)$

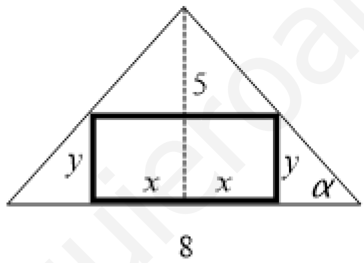


Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{\max} = 2xy$

b) Relación entre las variables: $\dfrac{5-y}{x} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 20 - 4y = 5x \Rightarrow y = \dfrac{20-5x}{4}$

$$S_{\max} = 2xy = 2x \cdot \frac{20-5x}{4} = \frac{40x - 10x^2}{4} = \frac{20x - 5x^2}{2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{20-10x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$S''_{\max} = \dfrac{-10}{2} < 0 \Rightarrow$ corresponde a un máximo independientemente del valor de x

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 4\,m$; altura $= y = \dfrac{5}{2}\,m$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función definida por $f(x)=x+xe^{-x}$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x-y+1=0$.
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta $x-y+1=0\Rightarrow y=x+1$ tiene de pendiente 1. La recta tangente como es paralela también tiene de pendiente 1, luego:

$$f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=1+e^{-x}-x\cdot e^{-x}=1+(1-x)\cdot e^{-x}=1\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$$

La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

Y como: $f(1)=1+\dfrac{1}{e}$

Luego, la recta tangente en $x=1$ es $y-1-\dfrac{1}{e}=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x-1+1+\dfrac{1}{e}\Rightarrow y=x+\dfrac{1}{e}$

b) La función $f(x)=x+xe^{-x}=x+\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de *x* que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1\cdot(e^x+1)+x\cdot e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot(1+x)+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot(1+x)+e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(1+x)+1=+\infty\Rightarrow \textit{No tiene}$$

$$\lim_{x\to-\infty}=x+xe^{-x}=-\infty\Rightarrow \textit{No tiene}$$

Calculamos la asíntota oblicua $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot(e^x+1)}{e^x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot e^x+x-x\cdot e^x}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego, la asíntota oblicua es: $y=x$

Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

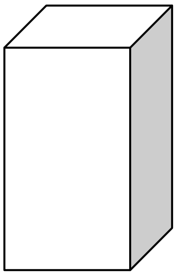
Como $\lim_{x\to 0} \dfrac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = \dfrac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \cdot sen\, x}{-2\cos x \cdot sen\, x + 3\cos^2 x \cdot sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2 + 3\cos x} = \frac{2}{-2+3} = 2$$

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m^2 para los laterales y de 24 euros/m^2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $V_{\max} = x^2 \cdot y$

b) Relación entre las variables: $50 = 24 \cdot x^2 + 18 \cdot 4xy = 24x^2 + 72xy \Rightarrow y = \dfrac{50 - 24x^2}{72x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{\max} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{50 - 24x^2}{72x} = \frac{50x - 24x^3}{72}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V'_{\max} = \frac{50 - 72x^2}{72} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{50}{72}} = \pm\frac{5}{6}$$

e) Comprobamos que es máximo

$$V'' = \frac{-144x}{72} \Rightarrow V''\left(x = \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = \dfrac{5}{6}\ m$; $y = \dfrac{5}{9}\ m$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sen(x)} & si \quad x>0 \end{cases}$.

Determina *a*, *b* y *c* sabiendo que *f* es continua, alcanza su máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Continua en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} ax^2+bx+c=c \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sen\,x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow c=2$$

Máximo en $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow -2a+b=0$

La recta tangente a *f* en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente $2\Rightarrow f'(-2)=2\Rightarrow -4a+b=2$.

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} -2a+b=0 \\ -4a+b=2 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-1\ ;\ b=-2$

Luego, $a=-1\ ;\ b=-2\ ;\ c=2$

Considera la función *f* definida por $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Halla *a* y *b* sabiendo que *f* tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.
b) ¿Qué tipo de extremos tiene *f* en $x = 1$ y en $x = 2$?
MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

- Extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0$

- Extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale que: $a = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$

b) Calculamos la segunda derivada: $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 2b = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$

$f''(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo

$f''(2) = \frac{2}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo