

Considera las rectas r y s de ecuaciones:

$$x-1 = y = 1-z \quad y \quad \begin{cases} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

a) Determina su punto de corte.

b) Halla el ángulo que forma r y s .

c) Determina la ecuación del plano que contiene a r y s .

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x-1 \\ y = 1-z \\ x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x=3; y=2; z=-1$$

Luego, el punto de corte es: $(3, 2, -1)$

b) Pasamos las dos rectas a paramétricas.

$$x-1 = y = 1-z \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1+y \\ y = y \\ z = 1-y \end{array} \right\} \Rightarrow A = (1, 0, 1); \vec{u} = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1+2y \\ y = y \\ z = 1-y \end{array} \right\} \Rightarrow B = (-1, 0, 1); \vec{v} = (2, 1, -1)$$

El ángulo que forman r y s es el ángulo que forman sus vectores directores, luego:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2+1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = 0'9428 \Rightarrow \alpha = 19'47^\circ$$

c) El plano viene definido por el punto A y los vectores directores de las rectas, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y+z-1=0$$

Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación $\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

a) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S .

b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{l} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{33 - 3z}{4} \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \end{array} \right\}$$

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $S = \left(\frac{33 - 3t}{4}, 0, t \right)$. Calculamos el vector

$\vec{PS} = \left(\frac{33 - 3t}{4} - 2, 0, t - 0 \right) = \left(\frac{25 - 3t}{4}, 0, t \right)$. Este vector es perpendicular al vector director de la recta, luego, su producto escalar vale cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{PS} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}, 0, 1 \right) \cdot \left(\frac{25 - 3t}{4}, 0, t \right) = 0 \Rightarrow -\frac{75}{16} + \frac{9t}{16} + t = 0 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto S tiene de coordenadas $S = \left(\frac{33 - 9}{4}, 0, 3 \right) = (6, 0, 3)$

b) Calculamos el vector $\vec{PQ} = (-3, 12, 4)$.

$\vec{PQ} \cdot \vec{PS} = (-3, 12, 4) \cdot (4, 0, 3) = 0 \Rightarrow$ Son perpendiculares, luego, el triángulo es rectángulo en P .

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(1,0,0)$; $B=(0,2,0)$; $C=(0,0,3)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,2,0)$ y $\vec{AC}=(-1,0,3)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{7}{2} u^2$$

Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$

a) Determina el valor de t para que A , B , C y D estén en un mismo plano.

b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B , que contenga al punto C .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación del plano que pasa por A , B y C . Para ello calculamos los vectores

$$\vec{AB} = (-2, 1, -1) \text{ y } \vec{AC} = (1, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x-1-y+1-z+1+2y-2=0 \Rightarrow x+y-z-1=0$$

Para que el punto D pertenezca al plano debe verificar la ecuación, luego:

$$x+y-z-1=0 \Rightarrow t-2-2-1=0 \Rightarrow t=5$$

b) Si es perpendicular al segmento AB , entonces el vector normal del plano es el vector

$$\vec{AB} = (-2, 1, -1), \text{ luego, el plano tiene de ecuación: } -2x+y-z+D=0.$$

Como queremos que pase por el punto C , debe verificar esa ecuación.

$$-2x+y-z+D=0 \Rightarrow -2 \cdot 2+1-2+D=0 \Rightarrow D=5$$

Luego el plano pedido es: $-2x+y-z+5=0$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,2,4)$ y la recta r definida por $\frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$

a) Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de A y de B .

b) Halla la ecuación del plano paralelo a r y que contiene a los puntos A y B .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector $\vec{AB} = (-2, 2, 2)$ y hallamos el punto medio del segmento AB , $M = (0, 1, 3)$.

El plano perpendicular tiene de ecuación: $-2x + 2y + 2z + D = 0$ y como tiene que pasar por el punto M , tenemos:

$$-2x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

Luego, el plano pedido es: $-2x + 2y + 2z - 8 = 0 \Rightarrow -x + y + z - 4 = 0$

b) Calculamos la recta que pasa por A y B : $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z-3=0 \end{cases}$

Hallamos el haz de planos que contiene a dicha recta:

$$x + y - 1 + k(x + z - 3) = 0 \Rightarrow (1+k)x + y + kz - 1 - 3k = 0$$

El vector normal de dicho plano debe ser perpendicular al vector director de la recta r , luego, su producto escalar debe valer cero.

$$(1+k, 1, k) \cdot (2, 1, 3) = 0 \Rightarrow 2 + 2k + 1 + 3k = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

Luego, el plano pedido es:

$$x + y + 1 + k(x + z - 3) = 0 \Rightarrow x + y + 1 - \frac{3}{5}(x + z - 3) = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 3z + 4 = 0$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,2)$

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D .

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-1, -3, 1)$; $\vec{AC} = (-2, -1, 1)$ y $\vec{AD} = (1, -2, 1)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-5| = \frac{5}{6} u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = (-2, -1, -5)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$

Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$.

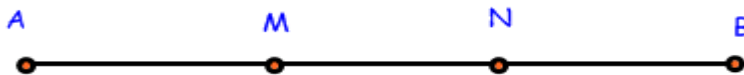
a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el vector: $\vec{AB} = (-2, -2, 2)$. Según la figura, se cumple que:

$$\vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AB} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (x-1, y-2, z-1) \Rightarrow M = \left(1 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

El punto N es el punto medio del segmento MB , luego:

$$N = \left(\frac{\frac{1}{3} - 1}{2}, \frac{\frac{4}{3} + 0}{2}, \frac{\frac{5}{3} + 3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

b) El vector normal del plano es $\vec{AB} = (-2, -2, 2)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares al segmento AB es: $-2x - 2y + 2z + D = 0$.

Como queremos el plano que pasa por el punto A , se debe verificar que:

$$-2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

Luego, el plano pedido es: $-2x - 2y + 2z + 4 = 0 \Rightarrow -x - y + z + 2 = 0$

Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ con $m \neq 0$.

a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π .

b) Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector normal del plano $(2, -1, n)$ y el vector director de la recta $(m, 4, 2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{2}{m} = \frac{-1}{4} = \frac{n}{2} \Rightarrow m = -8 ; n = -\frac{1}{2}$$

b) Si la recta está contenida en el plano, el punto $A = (1, 0, 1)$ de la recta debe pertenecer al plano, luego:

$$2 \cdot 1 - 0 + n \cdot 1 = 0 \Rightarrow n = -2$$

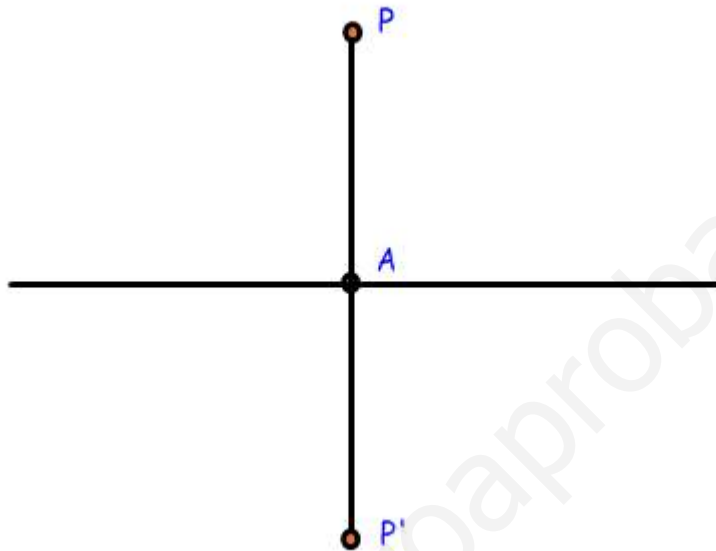
Además, si la recta está contenida en el plano, el vector normal del plano $(2, -1, n)$ y el vector director de la recta $(m, 4, 2)$, son perpendiculares, luego:

$$(2, -1, -2) \cdot (m, 4, 2) = 0 \Rightarrow 2m - 4 - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



De la recta r sabemos: $A = (1 + 2t, 3t, -1 - t)$; $\vec{u} = (2, 3, -1)$

Para calcular el simétrico del punto $P = (1, 1, 1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PA} = (2t, 3t - 1, -2 - t)$ y el vector $\vec{u} = (2, 3, -1)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PA} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2t, 3t - 1, -2 - t) \cdot (2, 3, -1) = 0 \Rightarrow 4t + 9t - 3 + 2 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{14} \Rightarrow A = \left(\frac{16}{14}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P + P'}{2} = A \Rightarrow \left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = \left(\frac{16}{14}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right) \Rightarrow P' = \left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7} \right)$$

Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda - 1)$.

a) ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A , B y C estén alineados?. Justifica la respuesta.

b) Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A , B y C . Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos estén alineados, las coordenadas de los vectores $\vec{AB} = (-\lambda - 2, 2 - \lambda, -\lambda)$ y $\vec{AC} = (-2, 0, -1)$, deben ser proporcionales, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{-1}{-\lambda} \Rightarrow \frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{0}{2 - \lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \\ \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{-1}{-\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 2$$

b) El plano viene definido por el punto $A = (2, 1, 1)$ y los vectores $\vec{AB} = (-3, 1, -1)$ y $\vec{AC} = (-2, 0, -1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & -3 & -2 \\ y - 1 & 1 & 0 \\ z - 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2 + 2y - 2 + 2z - 2 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow -x - y + 2z + 1 = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} u$$

Halla la ecuación del plano que es paralelo a r de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$ y contiene a la recta

$$s \text{ definida por } \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -11 + 2y \\ y = y \\ z = 19 - 2y \end{cases}$

La recta r , viene definida por el punto $A = (-11, 0, 19)$ y el vector director $\vec{u} = (2, 1, -2)$. La recta s , viene definida por el punto $B = (1, -2, 2)$ y el vector director $\vec{v} = (-5, 3, 2)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores \vec{u} y \vec{v} , luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -5 \\ y+2 & 1 & 3 \\ z-2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x + 6y + 11z - 18 = 0$$

Considera los planos π_1 , π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + y = 1, \quad ay + z = 0 \quad \text{y} \quad x + (1+a)y + az = a + 1$$

a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?

b) Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 1; a = 0$$

	R(A)	R(M)	
$a = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a = 1$	2	3	S. Incompatible
$a \neq 0$ y 1	3	3	S. Compatible Determinado

a) Para que los tres planos no tengan ningún punto en común tiene que ser $a = 1$.

b) Para $a = 0$, dos planos son coincidentes y el tercero los corta.

Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$, respecto de la recta r de ecuaciones:

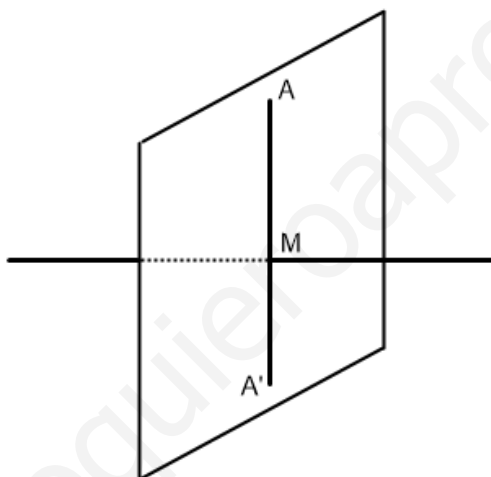
$$x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas:
$$x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=-1+2t \end{array} \right\}$$

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 2, 2)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x+2y+2z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $A(-3,1,6)$

$$-3+2\cdot 1+2\cdot 6+D=0 \Rightarrow D=-11 \Rightarrow x+2y+2z-11=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t)+2(-3+2t)+2(-1+2t)-11=0 \Rightarrow t=2$

luego las coordenadas del punto M son: $x=1+2=3$; $y=-3+4=1$; $z=-1+4=3$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA' , si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto A' , se debe verificar que: $\frac{-3+a}{2}=3$; $a=9$; $\frac{1+b}{2}=1$; $b=1$; $\frac{6+c}{2}=3$; $c=0$

Luego, el punto simétrico es: $(9,1,0)$.

Considera los puntos $A = (1, 0, -1)$ y $B = (2, 1, 0)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B .

b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$ y $Q = (3, 4, 1)$ está contenida en dicho plano.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta r .

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1) = \vec{u}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto A , el vector $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ y el vector $\vec{u} = (1, -1, -1)$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y - 2z - 2 = 0 \Rightarrow y - z - 1 = 0$$

b) Si la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano eso quiere decir que los puntos P y Q son del plano. Vemos que el punto P si verifica la ecuación del plano, pero el punto Q no la verifica, luego, la recta que pasa por P y Q no está contenida en el plano.

$$2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow P \text{ está en el plano}$$

$$4 - 1 - 1 \neq 0 \Rightarrow Q \text{ no está en el plano}$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

a) Halla un punto C de la recta de ecuación $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z$ que verifica que el triángulo de vértices

A, B y C tiene un ángulo recto en B .

b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y D , donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x - y + 3z = 6$ con el eje OX .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si pasamos la recta a paramétricas, cualquier punto C tendrá de coordenadas $C = (1+3t, 2t, t)$.

Como el triángulo es rectángulo en B , los vectores $\vec{BA} = (0, -2, 3)$ y $\vec{BC} = (3t, 2t-2, t+1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (0, -2, 3) \cdot (3t, 2t-2, t+1) = -4t + 4 + 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = 7$$

Luego, el punto C tiene de coordenadas $C = (1+3t, 2t, t) = (22, 14, 7)$

b) Calculamos el punto de corte del plano con el eje OX , que será: $D = (3, 0, 0)$

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (0, 2, -3)$ y $\vec{AD} = (2, 0, -2)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AD} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \frac{\sqrt{68}}{2} u^2$$

Considera los planos π_1 , π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$3x - y + z - 4 = 0, \quad x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x + z - 4 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,-1)$, es paralela a π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos a paramétricas la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - t \\ y = \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

Luego, cualquier punto A de la recta tiene de coordenadas $A(4-t, \frac{3}{2}, t)$.

La recta que nos piden pasa por P y A , y tiene que ser paralela al plano π_1 , luego el vector normal del plano $\vec{n} = (3, -1, 1)$ y el vector $\vec{PA} = (1-t, \frac{1}{2}, t+1)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{n} \cdot \vec{PA} = (3, -1, 1) \cdot (1-t, \frac{1}{2}, t+1) = 3 - 3t - \frac{1}{2} + t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{4}$$

El vector de la recta es: $\vec{PA} = (1 - \frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4} + 1) = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{4})$.

Por lo tanto, la recta que nos piden es: $\frac{x-3}{-\frac{3}{4}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{\frac{11}{4}}$

Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ y $P(1,-1,1)$, y la recta r definida por $\left. \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$

- a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
 b) Calcula el área del triángulo ABP .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas $C = (2+t, t, 0)$. Calculamos el módulo del vector $\vec{PC} = (1+t, t+1, -1)$ y lo igualamos a 3.

$$\left| \vec{PC} \right| = \sqrt{(1+t)^2 + (t+1)^2 + (-1)^2} = 3 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 ; t = -3$$

Luego, los puntos son: $C_1 = (3, 1, 0)$; $C_2 = (-1, -3, 0)$.

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{AP} = (0, -1, 1)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AP} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

Dados el punto $P(1,1,-1)$, y la recta r de ecuaciones $\left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right\}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P .

b) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a r y pasa por P .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1-t \\ y=-t \\ z=t \end{array} \right\}$

La recta pasa por el punto y su vector director es $\vec{u} = (-1, -1, 1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1, 0, 0)$, el vector $\vec{u} = (-1, -1, 1)$ y el vector $\vec{AP} = (0, 1, -1)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y+z=0$$

b) La recta pasa por el punto $P = (1, 1, -1)$ y su vector director es $\vec{v} = (a, b, c)$.

Como la recta es perpendicular a r , el producto escalar de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -a - b + c = 0$.

Además la recta está contenida en el plano $y+z=0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n} = (0, 1, 1)$ y el vector $\vec{v} = (a, b, c)$, también es cero, luego: $b+c=0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} -a-b+c=0 \\ b+c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = (2c, -c, c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a c el valor 1, la recta será:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Sea el punto $P(2,3,-1)$, y la recta r dada por las ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P .

b) Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta $\vec{u} = \vec{n} = (0, -2, 1)$. Luego, todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-2y + z + D = 0$. Nos interesa el que pasa por $P = (2, 3, -1)$, luego su ecuación será: $-2 \cdot 3 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow -2y + z + 7 = 0$

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano. Para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano.

$$-2y + z + 7 = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-2\lambda) + \lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1, -2 \cdot \left(-\frac{7}{5} \right), -\frac{7}{5} \right) = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5} \right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM} = \left(-1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right)$

$$d = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{5} \right)^2 + \left(-\frac{2}{5} \right)^2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ u}$$

M es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico, luego:

$$M = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5} \right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2}, \frac{-1+c}{2} \right) \Rightarrow a = 0; b = \frac{13}{5}; c = -\frac{9}{5}$$

Luego, el simétrico es: $P' = \left(0, \frac{13}{5}, -\frac{9}{5} \right)$

Considera los planos π_1 y π_2 dados, respectivamente, por las ecuaciones

$$(x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1) \quad \text{y} \quad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta r definida por $x = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2 .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos el plano π_1 a forma general:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 \\ y & -2 & 1 \\ z-7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y + z - 3 = 0$$

Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas: $A = (t, -1+t, 1-3t)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|2t - 1 + t + 1 - 3t - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2t - 1 + t - 1 + 3t + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \Rightarrow |-3| = |6t + 3| \Rightarrow t = 0 ; t = -1$$

Luego, los puntos son: si $t = 0 \Rightarrow A = (0, -1, 1)$; $t = -1 \Rightarrow A = (-1, -2, 4)$

Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$, y la recta s definida por $\left. \begin{array}{l} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{array} \right\}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a implícitas: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3z=10 \\ y+2z=5 \end{array} \right\}$

Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a r .

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0 \Rightarrow 0+0-10+k(0+0-5)=0 \Rightarrow k=-2$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es: $x+3z-10-2(y+2z-5)=0 \Rightarrow x-2y-z=0$.

b) Calculamos la ecuación de todos los planos que contienen a s .

$$x-1+k(2y-z+2)=0 \Rightarrow x+2ky-kz-1+2k=0$$

Como queremos que sea paralelo a r , el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2k,-k)$ y el vector director de la recta $\vec{u}=(3,2,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (3,2,-1) \cdot (1,2k,-k) = 3+4k+k=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que nos piden es: $x+2ky-kz-1+2k=0 \Rightarrow 5x-6y+3z-11=0$

Dada la recta r definida por $\frac{x+7}{2} = \frac{y-7}{-1} = z$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = \lambda \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (-7 + 2t, 7 - t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2, -5, s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (9 - 2t, -12 + t, s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (9 - 2t, -12 + t, s - t) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Rightarrow 30 - 6t + s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (9 - 2t, -12 + t, s - t) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow s - t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 6$; $s = 6$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (5, 1, 6) ; B = (2, -5, 6)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (5, 1, 6)$ y $\vec{AB} = (-3, -6, 0)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-6}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = (-3, -6, 0)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0} = \sqrt{45} \text{ u}$$

Considera los puntos $A(-1, k, 3)$, $B(k+1, 0, 2)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(2, 0, 1)$.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores \vec{AB} , \vec{BC} y \vec{CD} sean linealmente dependientes?.

b) Calcula los valores de k para los que los puntos A , B , C y D forman un tetraedro de volumen 1.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (k+2, -k, -1)$; $\vec{BC} = (-k, 2, -2)$; $\vec{CD} = (1, -2, 1)$. Para que sean linealmente dependientes, su determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 2k - 2 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución real}$$

Luego, no hay ningún valor de k para el que los vectores sean linealmente dependientes.

b) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (k+2, -k, -1)$; $\vec{AC} = (2, 2-k, -3)$; $\vec{AD} = (3, -k, -2)$.

$$V = 1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-k^2 - 2k - 2| \Rightarrow |-k^2 - 2k - 2| = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -k^2 - 2k - 2 = 6 \Rightarrow \text{No} \\ -k^2 - 2k - 2 = -6 \Rightarrow k = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta r de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$

- a) Halla el punto de intersección del plano π y la recta r .
 b) Halla el punto simétrico del punto $Q = (1, -2, 3)$ respecto del plano π .

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

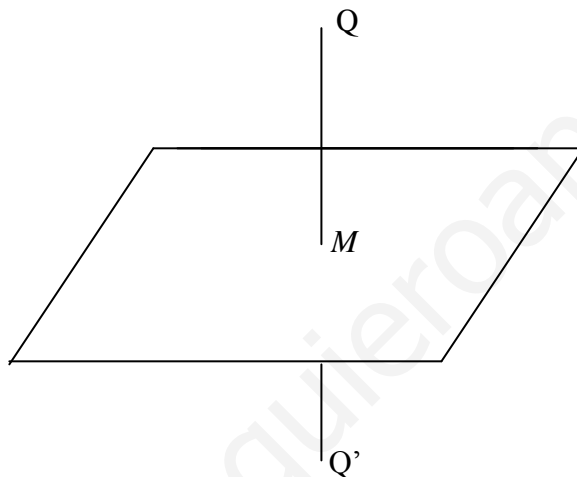
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2; y = 1; z = 4$$

Luego, el punto de intersección es $(2, 1, 4)$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto Q es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 2, -1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t) + 2 \cdot (-2+2t) - (3-t) = 0 \Rightarrow t = 1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = 2; y = 0; z = 2$

Como el punto M es el punto medio del segmento $Q Q'$, si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto Q' , se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2} = 2; a = 3; \frac{b-2}{2} = 0; b = 2; \frac{c+3}{2} = 2; c = 1$$

Luego, el punto simétrico es el $Q'(3, 2, 1)$

De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.

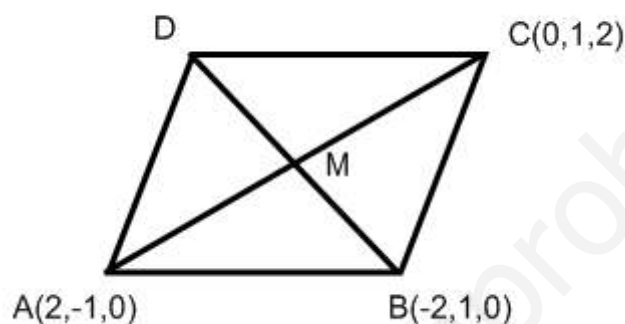
a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

b) Halla el área de dicho paralelogramo.

c) Calcula el vértice D .

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos las coordenadas del centro del paralelogramo: $M = \frac{A+C}{2} = (1,0,1)$. Calculamos el vector normal al plano:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{BA} = (4, -2, 0) \\ \vec{BC} = (2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -8, 4)$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{-8} = \frac{z-1}{4}$

b) El área del paralelogramo es:

$$\text{Área} = \text{módulo } |\vec{BA} \wedge \vec{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (4)^2} = \sqrt{96} u^2$$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{D+B}{2} \Rightarrow (1,0,1) = \frac{(a,b,c) + (-2,1,0)}{2} \Rightarrow D = (4,-1,2)$$

Sean r y s las rectas dadas por: $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.

b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A(3, 3, 0); \vec{u}(-1, 2, 1)$$

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} \Rightarrow B = (1, -1, 0); \vec{v} = (-1, 6, 2)$$

a) Para determinar el punto de corte de las dos rectas resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$\frac{3-t-1}{-1} = \frac{3+2t+1}{6} = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \text{el punto de corte es: } (-1, 11, 4)$$

b) El plano viene definido por el punto A y los vectores \vec{u} y \vec{v} , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ y-3 & 2 & 6 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y - 4z + 3 = 0$$

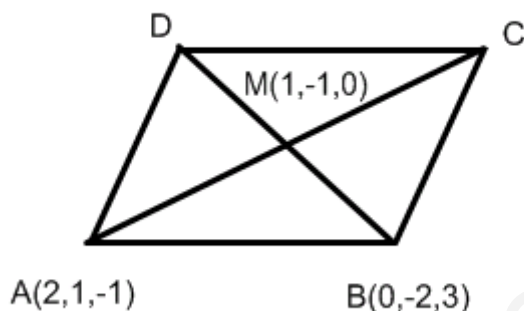
El punto $M(1, -1, 0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2, 1, -1)$ y $B(0, -2, 3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Con el punto M y los vectores $\vec{MA} = (1, 2, -1)$ y $\vec{MB} = (-1, -1, 3)$ calculamos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5x - 2y + z - 7 = 0$$

b) Calculamos las coordenadas del vértice C

$$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow (1, -1, 0) = \frac{(2, 1, -1) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow C = (0, -3, 1)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (1, -1, 0) = \frac{(0, -2, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow D = (2, 0, -3)$$

Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-2, -3, 4)$ y $\vec{AD} = (0, -1, -2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (10, -4, 2)$$

$$\text{Área} = \text{módulo} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \right| = \sqrt{(10)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{120} \text{ u}^2$$

Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$\text{Eje } OX \equiv \begin{cases} A = (0, 0, 0) \\ \vec{u} = (1, 0, 0) \end{cases} ; \quad r \equiv \begin{cases} 2x = 4 + 3y \\ 2x - z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (2, 0, 4) \\ \vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

$$\text{Dadas las rectas } r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4} \text{ y } s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

a) Determina la posición relativa de las recta r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores de la rectas son paralelos, luego las rectas son paralelas.

b) Calculamos el plano perpendicular a s : $3x - 2y - 2z + D = 0$, y queremos que pase por el punto $A = (-3, 9, 8)$ de la recta r .

$$3x - 2y - 2z + D = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (9) - 2 \cdot (8) + D = 0 \Rightarrow D = 43$$

Luego, el plano es: $3x - 2y - 2z + 43 = 0$.

Calculamos el punto de corte de la recta s con el plano:

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 9 - 2t \\ z = 8 - 2t \end{cases}$$

$$3x - 2y - 2z + 43 = 0 \Rightarrow 3 \cdot (3 + 3t) - 2 \cdot (9 - 2t) - 2 \cdot (8 - 2t) + 43 = 0 \Rightarrow t = -\frac{18}{17}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(3 - 3\frac{18}{17}, 9 + 2\frac{18}{17}, 8 + 2\frac{18}{17} \right) = \left(-\frac{3}{17}, \frac{189}{17}, \frac{172}{17} \right)$

La distancia entre las dos rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = \left(\frac{48}{17}, \frac{36}{17}, \frac{36}{17} \right)$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas. Calculamos el módulo del vector y lo igualamos a 3.

$$\left| \vec{AM} \right| = \sqrt{\left(\frac{48}{17} \right)^2 + \left(\frac{36}{17} \right)^2 + \left(\frac{36}{17} \right)^2} = \sqrt{\frac{4896}{289}} = \sqrt{\frac{288}{17}} u$$

Los puntos $A(1,1,5)$ y $B(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C , consecutivo a B , está en la recta $x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2}$. Determina los vértices C y D .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Pasamos la recta a paramétricas: $x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 6 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, luego, el vértice C tiene de

coordenadas $C(t, 6 - 2t, -1 + 2t)$.

Los vectores $\vec{AB}(0, 0, -3)$ y $\vec{BC}(1 - t, -5 + 2t, 3 - 2t)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar vale 0.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (0, 0, -3) \cdot (1 - t, -5 + 2t, 3 - 2t) = -9 + 6t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

El vértice C tiene de coordenadas: $C(t, 6 - 2t, -1 + 2t) = \left(\frac{3}{2}, 3, 2\right)$

Como los vectores $\vec{AB}(0, 0, -3)$ y $\vec{DC}\left(\frac{3}{2} - a, 3 - b, 2 - c\right)$ son iguales, las coordenadas del vértice D

son: $D = \left(\frac{3}{2}, 3, 5\right)$

Se consideran los vectores $\vec{u} = (k, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y $\vec{w} = (1, 1, k)$, donde k es un número real.

a) Determina los valores de k para los que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.

b) Determina los valores de k para los que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{w}$ son ortogonales.

c) Para $k = -1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a \vec{v} y \vec{w} y tienen módulo 1.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores son linealmente dependientes si su determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

b) Calculamos los vectores $\vec{u} + \vec{v} = (2+k, 2, -1)$ y $\vec{v} - \vec{w} = (1, 0, -2-k)$, y como son ortogonales, su producto escalar vale cero.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = (2+k, 2, -1) \cdot (1, 0, -2-k) = 2+k+2+k = 4+2k = 0 \Rightarrow k = -2$$

c) El vector perpendicular a \vec{v} y \vec{w} , es su producto vectorial.

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

y como tiene que ser unitario, lo dividimos por su módulo.

Luego el vector que nos piden es: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ o, también el $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3 \Rightarrow \begin{cases} x=1+4t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas: $(1+4t, 2-2t, 3+t)$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|(1+4t) - 2(2-2t) + 2(3+t) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1+4t - 4 + 4t + 6 + 2t - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|10t+2|}{3} = 4 \Rightarrow |10t+2| = 12 \Rightarrow t=1; t=-\frac{14}{10}$$

Luego, los puntos son: si $t=1 \Rightarrow A=(5,0,4)$; $t=-\frac{14}{10} \Rightarrow B=\left(-\frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$

Determina un punto P de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3,2,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $P = (-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t)$.

Como este punto equidista de O y de A , se cumple que: $|\overline{OP}| = |\overline{AP}|$.

$$\overline{OP} = (-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t) \Rightarrow |\overline{OP}| = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + (-5 + 3t)^2 + (-4 + 3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 66t + 50}$$

$$\overline{AP} = (-6 + 2t, -7 + 3t, -5 + 3t) \Rightarrow |\overline{AP}| = \sqrt{(-6 + 2t)^2 + (-7 + 3t)^2 + (-5 + 3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{22t^2 - 66t + 50} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110} \Rightarrow 30t = 60 \Rightarrow t = 2$$

Luego, el punto que nos piden es: $P = (1, 1, 2)$.

Considera el punto $P(1,0,2)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 8 - 2t \\ z = t \end{cases}$. El vector director de la recta $(-1, -2, 1)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$-x - 2y + z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(1, 0, 2)$.

$$-x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -1 - 2 \cdot 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x - 2y + z - 1 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$-x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow -(6 - t) - 2(8 - 2t) + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{23}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(6 - \frac{23}{6}, 8 - \frac{46}{6}, \frac{23}{6} \right) = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6} \right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, 0, 2) + (a, b, c)}{2} = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6} \right) \Rightarrow P' = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{17}{3} \right)$$

Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C .

b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Calcula la distancia del punto D al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto A y los vectores $\vec{AB} = (1,0,-2)$; $\vec{AC} = (0,1,-3)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2x + 3y + z - 1 = 0$$

b) Si los cuatro puntos son coplanarios, el punto D debe satisfacer la ecuación del plano que hemos calculado en el apartado anterior.

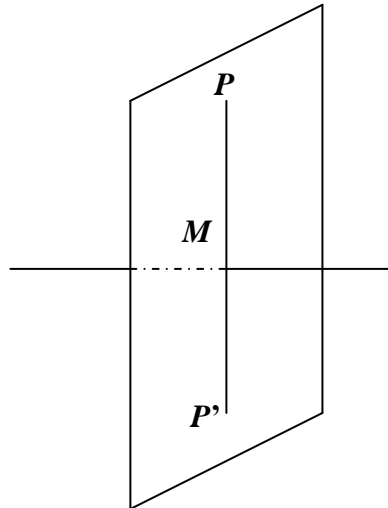
$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No son coplanarios.}$$

c) Calculamos la distancia

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2} u$$

Halla el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r definida por $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto P es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x - y + z + D = 0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(2,1,-5)$

$$1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + D = 0 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow x - y + z + 4 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$t + 2 + t + t + 4 = 0 \Rightarrow 3t = -6 \Rightarrow t = -2$$

luego las coordenadas del punto M son: $M(-2,0,-2)$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que: $\frac{2+a}{2} = -2 \Rightarrow a = -6$; $\frac{1+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -1$; $\frac{-5+c}{2} = -2 \Rightarrow c = 1$

Luego el simétrico es: $P' = (-6, -1, 1)$

Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la

$$\text{recta dada por: } s \equiv \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

b) Calcula, para $a = 1$, la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta s .

$$s \equiv \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = at \end{cases} \Rightarrow \vec{u}(1, 2, a)$$

Como las rectas son paralelas, las componentes de los vectores directores de ambas rectas deben ser proporcionales

$$\frac{a}{1} = \frac{2a}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \pm 1$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1,0,0)$ a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (1,0,0)$

$$x + 2y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow x + 2y + z - 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow t + 2(-2 + 2t) + t - 1 = 0 \Rightarrow 6t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{6}$$

Luego, el punto de corte es el $B = \left(\frac{5}{6}, -2 + \frac{10}{6}, \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$. La distancia entre las rectas viene

dada por el módulo del vector $\vec{AB} = \left(\frac{5}{6} - 1, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$, luego:

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ u}$$

Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.

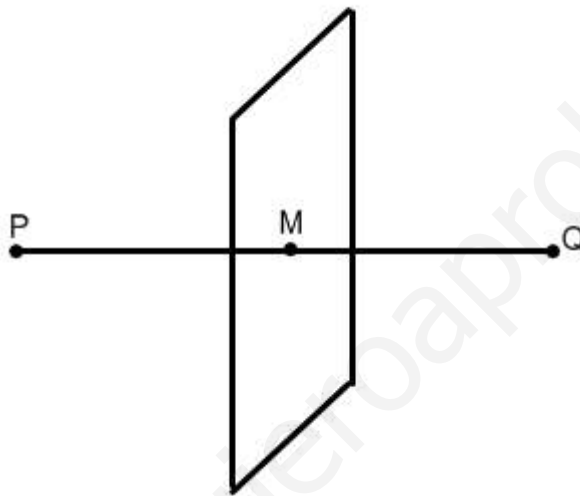
a) Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

b) Calcula la distancia de P a π .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento PQ y que pasa por su punto medio M .



El vector $\vec{PQ} = (-2, -2, 0)$ es el vector normal del plano, luego:

$$-2x - 2y + D = 0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M = (1, 2, 1)$, tenemos que el plano pedido es:

$$-2x - 2y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow -2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

b) La distancia de P a π es el módulo del vector $\vec{PM} = (-1, -1, 0)$, luego:

$$d(P, \pi) = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{2} \text{ u}$$

Calcula la distancia entre las rectas: $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Vemos que las dos rectas son paralelas pues tienen el mismo vector director $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (0, 0, 0)$ de la recta r a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (0, 0, 0)$

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + s + 2 + s + 3 + s = 0 \Rightarrow 3s + 6 = 0 \Rightarrow s = -2$$

Luego, el punto de corte es el $B = (1 - 2, 2 - 2, 3 - 2) = (-1, 0, 1)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AB} = (-1, 0, 1)$, luego:

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \text{ u}$$

Considera las rectas: $r \equiv x = y = z$ $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

Halla la ecuación de la recta que corta a r y a s y es paralela a t .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si pasamos a paramétricas las rectas r y s , vemos que: cualquier punto de la recta r tiene de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tiene de coordenadas $B = (2, 1, s)$.

El vector $\vec{AB} = (2-t, 1-t, s-t)$ tiene que ser paralelo al vector director de la recta t $\vec{u} = (2, 3, 1)$, luego, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2-t}{2} = \frac{1-t}{3} = \frac{s-t}{1} \Rightarrow t = 4 ; s = 3$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{1}$

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.

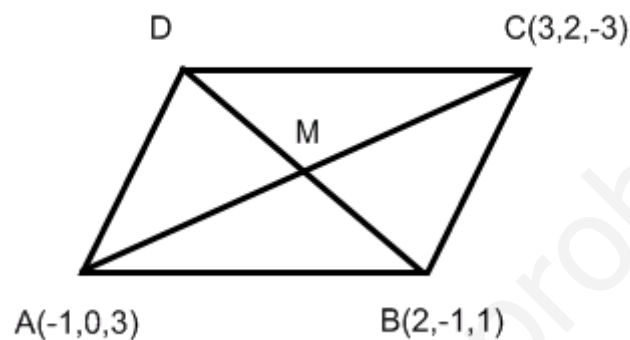
a) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

b) Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.

c) Calcula las coordenadas del vértice D .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (3, -1, -2)$ y $\vec{AC} = (4, 2, -6)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y & -1 & 2 \\ z-3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

b) La recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-6}$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{(-1,0,3)+(3,2,-3)}{2} = (1,1,0)$$
$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (1,1,0) = \frac{(2,-1,1)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow D = (0,3,-1)$$

Considera los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,0,4)$.

a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\vec{AB} = 3\vec{AM}$, y como $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$ y $\vec{AM} = (x-1, y-2, z-3)$, obtenemos: $(-2, -2, 1) = (3x-3, 3y-6, 3z-9) \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}; z = \frac{10}{3}$, es

decir el punto M es $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}, \frac{\frac{4}{3}+0}{2}, \frac{\frac{10}{3}+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

b) El vector $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$ es el vector normal del plano, luego, $-2x - 2y + z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto A :

$$-2x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2x - 2y + z + 3 = 0$

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.

a) Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r .

b) Calcula la distancia de A a r .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como A y B son simétricos respecto de r , el punto medio M del segmento AB pertenece a la recta r

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal del plano que contiene a los tres puntos

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, 0, 4)$$

El vector director (a, b, c) de la recta r tiene que ser perpendicular al vector normal del plano, luego:

$$2a + 4c = 0$$

También tiene que ser perpendicular al vector $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$, luego: $-2a - 2b + c = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones sale que: $a = -2c$; $b = \frac{5c}{2}$; $c = c$. Vemos que hay

infinitas soluciones, si damos a c el valor 2, el vector director de la recta es: $(-4, 5, 2)$. Por lo tanto, la

ecuación de la recta que nos piden es: $\frac{x}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-\frac{3}{2}}{2}$

b) La distancia de A a la recta r es el módulo del vector $\vec{AM} = \left(-1, -1, \frac{1}{2}\right)$, luego:

$$d = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} u$$

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r .

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 5x-10=3y-9 \\ x-2=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y=1 \\ x-3z=2 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x+y=1 \\ z=5 \\ 5x-3y=1 \\ x-3z=2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la

matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (2, 3, 0) \\ \vec{u} = (-3, 5, 1) \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} B = (1, 0, 5) \\ \vec{v} = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{14}{\sqrt{6}} = 5'71u$$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta $P = (1 + 3t, 2t, -1 + t)$.

Calculamos la ecuación general del plano $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$

Como piden los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2 , tenemos que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, luego:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|1 + 3t - 2t - 3 + 3t + 2|}{\sqrt{11}} = \frac{|1 + 3t - 2t - 3 + 3t + 5|}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{|4t|}{\sqrt{11}} = \frac{|4t + 3|}{\sqrt{11}} \Rightarrow |4t| = |4t + 3|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$4t = -4t - 3 \Rightarrow t = -\frac{3}{8} \Rightarrow P = \left(\frac{5}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{11}{8} \right)$$

$$4t = 4t + 3 \Rightarrow 3 = 0 \Rightarrow \text{Absurdo}$$

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.

b) Calcula el área de dicho rectángulo.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB} = (-1, -1, 0)$; $\vec{AC} = (1, -3, -2)$ y $\vec{AD} = (2, -2, -2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los 4 puntos están en un mismo plano.}$$

Si los cuatro puntos forman un rectángulo



Los vectores \vec{AB} y \vec{AD} tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores \vec{AB} y \vec{BC} tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores \vec{AB} y \vec{DC} tienen que tener el mismo módulo $\Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{DC}| = \sqrt{2} \Rightarrow$ Cierto

Luego forman un rectángulo.

c) Área = $|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{3} \text{ u}^2$

Considera el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.

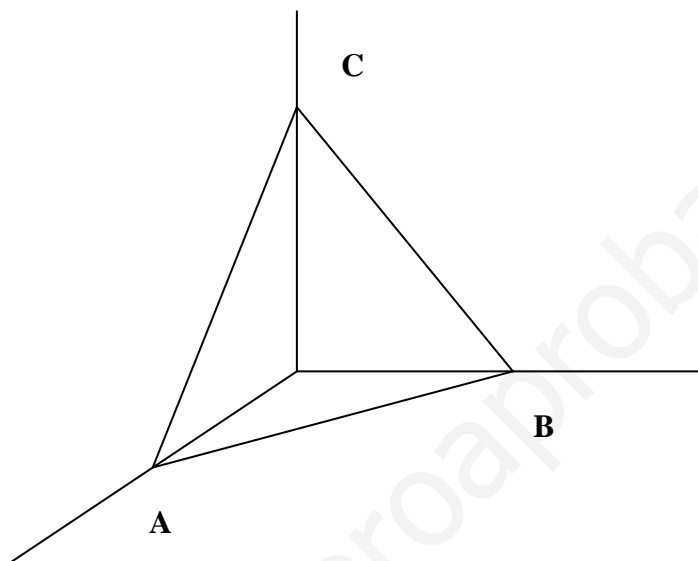
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A = (3, 0, 0)$; $B = (0, 6, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (-3, 6, 0)$; $\vec{AC} = (-3, 0, 2)$. El área pedida es:

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (12\vec{i} + 6\vec{j} + 18\vec{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{504} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{OA} = (3, 0, 0)$; $\vec{OB} = (0, 6, 0)$ y $\vec{OC} = (0, 0, 2)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |36| = 6 \text{ u}^3$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene a A , B y C

b) Halla el punto simétrico de D respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-2, 3, -1)$; $\vec{AC} = (1, 1, 0)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x - y - 5z + 9 = 0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 4-5t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x - y - 5z + 9 = 0 \Rightarrow 1 + t + t - 20 + 25t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{27}$$

luego, el punto es: $M = \left(1 + \frac{10}{27}, -\frac{10}{27}, 4 - \frac{50}{27}\right) = \left(\frac{37}{27}, -\frac{10}{27}, \frac{58}{27}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento DD' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto D' , se debe verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{2} &= \frac{37}{27} \Rightarrow a = \frac{47}{27} \\ \frac{0+b}{2} &= -\frac{10}{27} \Rightarrow b = -\frac{20}{27} \\ \frac{4+c}{2} &= \frac{58}{27} \Rightarrow c = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Luego el simétrico es: $D' = \left(\frac{47}{27}, -\frac{20}{27}, \frac{8}{27}\right)$

Considera la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2,3,2)$.

b) Calcula la distancia de r a s .

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta r : $\overline{AB}(-2,1,1)$

Como las rectas son paralelas, el vector director de s es $\overline{AB}(-2,1,1)$, luego, la ecuación de la recta s es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1,0,-1)$ a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (1,0,-1)$

$$-2x + y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow -2x + y + z + 3 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{aligned} -2x + y + z + 3 &= 0 \\ x &= -2 - 2t \\ y &= 3 + t \\ z &= 2 + t \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2(-2 - 2t) + 3 + t + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow 12 + 6t = 0 \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto de corte es el $M = (-2 + 4, 3 - 2, 2 - 2) = (2, 1, 0)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = (2 - 1, 1 - 0, 0 + 1) = (1, 1, 1)$, luego:

$$d = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3} \text{ u}$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1,1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a r .

$$x + 2y - z - 3 + k(2x - y + z - 1) = 0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x + 2y - z - 3 + k(2x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 - 3 + k(0 + 0 + 0 - 1) = 0 \Rightarrow k = -3$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es:

$$x + 2y - z - 3 - 3(2x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow -5x + 5y - 4z = 0.$$

- b) El vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -5)$$

Luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a r es: $x - 3y - 5z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto $(1,1,0)$, su ecuación será:

$$x - 3y - 5z + D = 0 \Rightarrow 1 - 3 \cdot 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow x - 3y - 5z + 2 = 0$$

Pasamos el plano de general a paramétricas:

$$x - 3y - 5z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3t + 5s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$.

a) Calcula los valores de λ que hacen que \vec{u} y \vec{w} sean ortogonales.

b) Calcula los valores de λ que hacen que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente independientes.

c) Para $\lambda = 1$ escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w}

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(1, -1, 3) \cdot (\lambda, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

b) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -4$$

Luego, son independientes para todos los valores de $\lambda \neq -4$.

c) Escribimos el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

$$(3, 0, 2) = a \cdot (1, -1, 3) + b \cdot (1, 0, -1) + c \cdot (1, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a + c = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a = 1; b = 1; c = 1$$

Luego la combinación lineal es: $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Sea r la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\left. \begin{array}{l} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{array} \right\}$.

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$r \equiv \frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{array} \right\} \Rightarrow A = (-2, -1, 1); \vec{u} = (2, 1, -3)$$

$$s \equiv \left. \begin{array}{l} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 6 + 3t \end{array} \right\} \Rightarrow B = (3, 0, 6); \vec{v} = (1, 1, 3)$$

Calculamos el determinante de $\vec{AB} = (5, 1, 5)$, \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 3 + 10 - 5 - 6 + 15 = 26 \neq 0 \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) El plano que nos piden viene determinado por (A, \vec{u}, \vec{v}) y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x+6-3y-3+2z-2-z+1-6y-6+3x+6 = 6x-9y+z+2=0$$

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} están en el mismo plano.

b) \vec{w} es perpendicular a \vec{u} y \vec{v} .

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es $\frac{1}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Si están en un mismo plano, los vectores son linealmente dependientes, luego, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 2 & 2-3\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Luego, están en el mismo plano si $\alpha = 0$.

b) Si \vec{w} es perpendicular a \vec{u} y \vec{v} , su producto escalar debe valer 0.

$$(1, -1, 0) \cdot (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha) = 1 + \alpha - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(0, 1, 2) \cdot (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha) = 2\alpha + 4 - 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego, para $\alpha = 1$ el vector \vec{w} es perpendicular a \vec{u} y \vec{v}

c) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} |-9\alpha| \Rightarrow |-9\alpha| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{9} \\ 9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta r dada por $\left. \begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r .

b) Calcula la distancia de P a r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{array} \right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u} = (-1, -1, 1)$.

Todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-x - y + z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto P :

$$-x - y + z + D = 0 \Rightarrow -2 + 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x - y + z = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-x - y + z = 0 \Rightarrow -2 + t - 1 + t + t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de corte es: $M = (2-1, 1-1, 1) = (1, 0, 1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une P y el punto M , es decir:

$$\left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} u$$

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el área del triángulo ABC .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto $A = (-3,4,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (6,2,3)$ y $\overrightarrow{AC} = (2,-2,1)$.

Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x - 2z + 3 = 0$$

b) La recta viene definida por el punto $(0,0,0)$ y su vector director será el vector normal del plano

$\vec{u} = (1,0,-2)$. Luego su ecuación será: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 0 + 256} = \frac{\sqrt{320}}{2} u^2$$

Considera el punto $A(8, -1, 3)$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{3}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r .

b) Halla el punto simétrico de A respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. El vector director de la recta $(2, 1, 3)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x + y + 3z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(8, -1, 3)$.

$$2x + y + 3z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 8 - 1 + 3 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

Luego, el plano que nos piden es: $2x + y + 3z - 24 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x + y + 3z - 24 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (-1 + 2t) + (2 + t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 24 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(-1 + 3, 2 + \frac{3}{2}, 1 + \frac{9}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(8, -1, 3) + (a, b, c)}{2} = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right) \Rightarrow P' = (-4, 8, 8)$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y s la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1+t, 1+t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1-2s, s, 1-2s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow 3t+3s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (-2, 1, -2) = 0 \Rightarrow 3-3t-9s = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = -\frac{1}{2}$; $s = \frac{1}{2}$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right); \quad B = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ y $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$

a) Halla la posición relativa de π y r .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta r a implícitas $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{cases}$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left. \begin{array}{l} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{array} \right\}$

Como $R(A) = 2$ y $R(M) = 3$, la recta es paralela al plano

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x + 2y - 5 + k(-3x + 2z + 3) = 0 \Rightarrow (1 - 3k)x + 2y + 2kz - 5 + 3k = 0$$

El vector normal de este plano $(1 - 3k, 2, 2k)$ y el vector normal del plano π $(2, 1, -1)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1 - 3k, 2, 2k) \cdot (2, 1, -1) = 0 \Rightarrow 2 - 6k + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $-x + 4y + 2z - 7 = 0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x + 2y - 5 + k(-3x + 2z + 3) = 0 \Rightarrow (1 - 3k)x + 2y + 2kz - 5 + 3k = 0$$

El vector normal de este plano $(1 - 3k, 2, 2k)$ y el vector normal del plano π $(2, 1, -1)$, tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1 - 3k}{2} = \frac{2}{1} = \frac{2k}{-1} \Rightarrow k = -1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $2x + y - z - 4 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 2t + s \\ z = s \end{array} \right\}$

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} .$$

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y por B .

b) Halla el punto de la recta r que está a la misma distancia de A y de B .

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por el punto $(1,0,1)$ de la recta, el vector director de la recta $\vec{u} = (2,1,0)$ y el vector $\vec{AB} = (0,-2,-4)$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y - z + 2 = 0$$

b) Calculamos los vectores:

$$\vec{AC} = (1+2t-1, t-1, 1-2) = (2t, t-1, -1); \vec{BC} = (1+2t-1, t+1, 1+2) = (2t, t+1, 3)$$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\left| \vec{AC} \right| = \left| \vec{BC} \right| \Rightarrow \sqrt{4t^2 + (t-1)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 + (t+1)^2 + 9} \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto C es: $C = (1+2t, t, 1) = (-3, -2, 1)$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r .

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a r : $x - y + 4z + D = 0$.

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $(0,0,0)$, luego:

$$x - y + 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 4 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x - y + 4z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$x - y + 4z = 0 \Rightarrow 1 + t + t + 4(-1 + 4t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1 + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1 + \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une el origen de coordenadas y el punto M , es decir:

$$|\vec{OM}| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ u}$$

b) La ecuación de la recta que pasa por O y M es: $\frac{x}{\frac{7}{6}} = \frac{y}{-\frac{1}{6}} = \frac{z}{-\frac{2}{6}}$

Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$

a) Calcula m para que A , B , C y D estén en un mismo plano.

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

c) Calcula el área del triángulo A, B y C .

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB} = (2,0,2)$; $\vec{AC} = (-1,1,-1)$ y $\vec{AD} = (2,0,m-1)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2m - 2 - 4 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Luego, para $m = 3$, los cuatro puntos están en un mismo plano.

b) El plano que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y su vector normal es $\vec{AB} = (2,0,2)$.

El punto medio es: $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (1,1,2)$.

Todos los planos que tienen por vector normal el vector $\vec{AB} = (2,0,2)$, tienen de ecuación $2x + 2z + D = 0$. Como tiene que pasar por el punto $M(1,1,2)$, su ecuación será:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow 2x + 2z - 6 = 0 \Rightarrow x + z - 3 = 0$$

c) Los vectores son: $\vec{AB} = (2,0,2)$ y $\vec{AC} = (-1,1,-1)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \text{módulo}(-2,0,2) = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} u^2$$

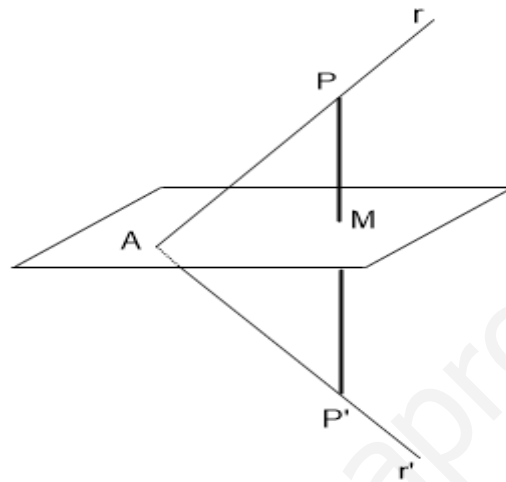
Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$

a) Calcula el punto P' , simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π .

b) Calcula la recta r' , simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2, 1, -1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2 \cdot (2 + 2t) + (-1 + t) - (5 - t) + 8 = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = 0$; $y = -2$; $z = 6$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que: $\frac{a+2}{2} = 0$; $a = -2$; $\frac{b-1}{2} = -2$; $b = -3$; $\frac{c+5}{2} = 6$; $c = 7$

Luego, el punto simétrico es el $P'(-2, -3, 7)$

b) Calculamos el punto de corte de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$ con el plano π

$$2 \cdot (2 - 2t) + (-1 + 3t) - (5 + t) + 8 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow A(-4, 8, 8)$$

La recta que nos piden pasa por el punto A y P' , luego: $\overline{AP'}(2, -11, -1)$

$$r' \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y-8}{-11} = \frac{z-8}{-1}$$

Considera el punto $P(-3,1,6)$ y la recta r dada por $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r .
- MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -5 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$. El vector director de la recta $(1, 2, 2)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$x + 2y + 2z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(-3, 1, 6)$.

$$x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + D = 0 \Rightarrow D = -11$$

Luego, el plano que nos piden es: $x + 2y + 2z - 11 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x + 2y + 2z - 11 = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot (-5 + 2t) + 2 \cdot (-3 + 2t) - 11 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto de corte es: $M = (3, -5 + 2 \cdot 3, -3 + 2 \cdot 3) = (3, 1, 3)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(-3, 1, 6) + (a, b, c)}{2} = (3, 1, 3) \Rightarrow P' = (9, 1, 0)$$

Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de

la recta r dada por
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula las coordenadas de los posibles puntos C de r para que el triángulo ABC tenga un ángulo recto en el vértice A .

b) Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área igual a $\sqrt{2}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Cualquier punto C , tendrá de componentes $C = (t, -2t, 0)$. Como queremos que sea un triángulo rectángulo en A , los vectores $\vec{AB} = (2, 0, 2)$ y $\vec{AC} = (t, -2t - 1, -1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer 0.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (2, 0, 2) \cdot (t, -2t - 1, -1) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego el punto C será: $C = (1, -2, 0)$

b) Cualquier punto D , tendrá de componentes $D = (t, -2t, 0)$.

Calculamos el área del triángulo ABD .

$$\vec{AB} = (2, 0, 2); \vec{AD} = (t, -2t - 1, -1).$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \right| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ t & -2t - 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left[(2 + 4t) \vec{i} + (2 + 2t) \vec{j} - (2 + 4t) \vec{k} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(2 + 4t)^2 + (2 + 2t)^2 + (2 + 4t)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36t^2 + 40t + 12} = \sqrt{2} \Rightarrow 9t^2 + 10t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1; t = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Luego el punto D será: $D = (-1, 2, 0)$ ó $D = \left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, 0\right)$

Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

a) Determina el ángulo que forman π y π' .

b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.

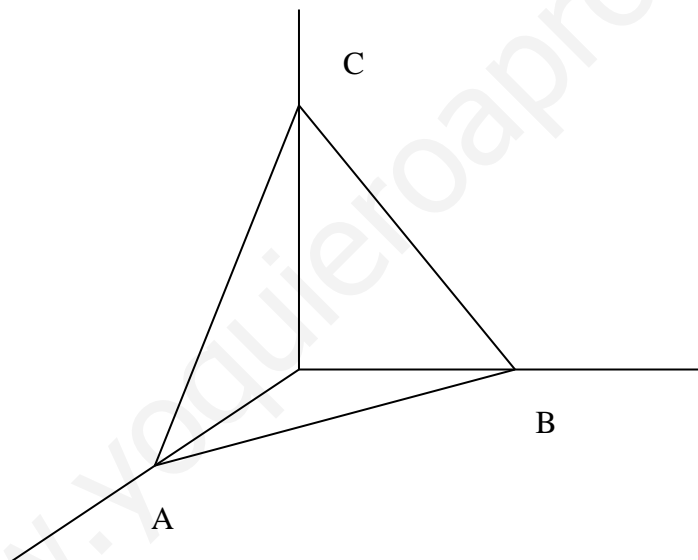
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1 = (1, 3, 2)$ y $\vec{n}_2 = (-2, 1, 3)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{\sqrt{1+9+4} \cdot \sqrt{4+1+9}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

b)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A = (5, 0, 0)$; $B = \left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$ y

$$C = \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$

Calculamos los vectores $\vec{OA} = (5, 0, 0)$; $\vec{OB} = \left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$ y $\vec{OC} = \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{125}{36} u^3$$

Sean el punto $P(1, 6, -2)$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$

a) Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r .

b) Calcula la distancia entre el punto P y la recta r

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas:
$$\left. \begin{aligned} \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2} &\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

La recta pasa por el punto $A = (5, -1, 0)$ y su vector director es $\vec{u} = (6, -3, 2)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (5, -1, 0)$, el vector $\vec{u} = (6, -3, 2)$ y el vector $\vec{AP} = (-4, 7, -2)$ luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 & -4 \\ y+1 & -3 & 7 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x + 4y + 30z + 44 = 0 \Rightarrow -4x + 2y + 15z + 22 = 0$$

b) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P

$$6x - 3y + 2z + D = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 - 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + D = 0 \Rightarrow D = -16 \Rightarrow 6x - 3y + 2z + 16 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$6 \cdot (5 + 6t) - 3 \cdot (-1 - 3t) + 2 \cdot (2t) + 16 = 0 \Rightarrow 49 + 49t = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego el punto de corte es:

$$M = (5 + 6t, -1 - 3t, 2t) = (5 + 6 \cdot (-1), -1 - 3 \cdot (-1), 2 \cdot (-1)) = (-1, 2, -2)$$

La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = (-2, -4, 0)$, luego:

$$|\vec{PM}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ u}$$

Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta r , que contiene al punto $P(3,-5,4)$ y corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta s a paramétricas: $\left. \begin{array}{l} \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \\ x = 4 + 5t \\ y = 8 - 3t \\ z = 4t \end{array} \right\}$

Cualquier punto M de la recta s tiene de coordenadas $M = (4 + 5t, 8 - 3t, 4t)$. El vector $\vec{PM} = (1 + 5t, 13 - 3t, -4 + 4t)$ tiene que ser perpendicular al vector director $\vec{u} = (5, -3, 4)$ de la recta s , por lo tanto, su producto escalar debe valer cero

$$\vec{PM} \cdot \vec{u} = (1 + 5t, 13 - 3t, -4 + 4t) \cdot (5, -3, 4) = 0 \Rightarrow 5 + 25t - 39 + 9t - 16 + 16t = 0 \Rightarrow 50t - 50 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Por lo tanto el vector \vec{PM} , será: $\vec{PM} = (6, 10, 0)$ y la ecuación paramétrica de la recta r que nos

$$\text{piden es: } \left. \begin{array}{l} x = 3 + 6t \\ y = -5 + 10t \\ z = 4 \end{array} \right\}$$

Sea r la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$

a) Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto $P(4, -2, 2)$

b) Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $A = (-2 + 3t, -1 + 4t, t)$.

Como este punto equidista de O y de P , se cumple que: $|\overline{OA}| = |\overline{PA}|$.

$$\overline{OA} = (-2 + 3t, -1 + 4t, t) \Rightarrow |\overline{OA}| = \sqrt{(-2 + 3t)^2 + (-1 + 4t)^2 + (t)^2} = \sqrt{26t^2 - 20t + 5}$$

$$\overline{PA} = (-6 + 3t, 1 + 4t, -2 + t) \Rightarrow |\overline{PA}| = \sqrt{(-6 + 3t)^2 + (1 + 4t)^2 + (-2 + t)^2} = \sqrt{26t^2 - 32t + 41}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{26t^2 - 20t + 5} = \sqrt{26t^2 - 32t + 41} \Rightarrow 12t = 36 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto que nos piden es: $A = (7, 11, 3)$.

b) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por el origen de coordenadas

$$3x + 4y + z + D = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow 3x + 4y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$3 \cdot (-2 + 3t) + 4 \cdot (-1 + 4t) + 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 26t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{13}$$

Luego el punto de corte es:

$$M = \left(-2 + 3 \cdot \frac{5}{13}, -1 + 4 \cdot \frac{5}{13}, \frac{5}{13} \right) = \left(-\frac{11}{13}, \frac{7}{13}, \frac{5}{13} \right)$$

Considera los puntos $B(1, 2, -3)$, $C(9, -1, 2)$, $D(5, 0, -1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B , C y D .

b) Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{BC} = (8, -3, 5)$; $\vec{BD} = (4, -2, 2)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{BC} \wedge \vec{BD}| =$$
$$\frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (4, 4, -4) = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{12} = 3'46 \text{ u}^2$$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Cualquier punto A de la recta r tendrá de coordenadas $A = (-1 - t, t, t)$. Como el ángulo recto está en A , los vectores \vec{AB} y \vec{AC} , son perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{AB} = (2 + t, 2 - t, -3 - t)$$

$$\vec{AC} = (10 + t, -1 - t, 2 - t)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (2 + t, 2 - t, -3 - t) \cdot (10 + t, -1 - t, 2 - t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 12t + 12 = 0 \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto A es: $A = (1, -2, -2)$

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

a) Halla la distancia de P a r .

b) Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P

$$x - y + D = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot t - 1 \cdot (-t) - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Luego el punto de corte es: $M = (t, -t, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$, luego:

$$|\vec{PM}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2,12 \text{ u}$$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

La recta pasa por el punto $A=(0,0,1)$ y su vector director es $\vec{u}=(1,-1,0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(0,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,-1,0)$ y el vector $\vec{AP}=(1,0,-2)$ luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & -1 & 0 \\ z-1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 1 = 0$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y s la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = -1 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1, 1, t - 2)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1 + s, s, -1)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (s, s - 1, 1 - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow (s, s - 1, 1 - t) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow (s, s - 1, 1 - t) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow s + s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, -1) ; B = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (1, 1, -1)$ y $\vec{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0'7071 u$$

Considera el plano π de ecuación $mx + 5y + 2z = 0$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π .

b) Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, luego, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{m}{3} = \frac{5}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow m = 3 ; n = 5$$

b) Para que la recta r esté contenida en el plano π , el punto de la recta debe pertenecer al plano y el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

Sustituimos el punto en la ecuación del plano.

$$m \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = 2$$

El producto escalar de los vectores $(m, 5, 2)$ y $(3, n, 2)$ debe valer cero, luego:

$$m \cdot 3 + 5 \cdot n + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 3m + 5n + 4 = 0 \Rightarrow 6 + 5n + 4 = 0 \Rightarrow n = -2$$

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta r dada por $\left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .

b) Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u} = (0, -2, 1)$.

Todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-2y + z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto P :

$$-2y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2y + z - 5 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-2y + z - 5 = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-2t) + t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de corte es: $M = (1, -2, 1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM} = (0, -2, -4)$, es decir:

$$\left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \text{ u}$$

Si llamamos $P' = (a, b, c)$, se cumple que el punto M es el punto medio del segmento PP' , luego:

$$\frac{1+a}{2} = 1 \Rightarrow a = 1 ; \frac{0+b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4 ; \frac{5+c}{2} = 1 \Rightarrow c = -3$$

Por lo tanto, el simétrico es: $P' = (1, -4, -3)$

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta s a paramétricas y calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1, 1, 1) \\ \vec{u} = (2, -1, 0) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1, 0, -1) \\ \vec{v} = (-2, 1, 0) \end{cases}$$

Como las componentes de los dos vectores directores de las rectas son proporcionales, los vectores son paralelos y las rectas paralelas, por lo tanto, las rectas son coplanarias.

El plano que nos piden viene definido por el punto A y los vectores $\vec{AB} = (-2, -1, -2)$ y \vec{u} . Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 4y + 4z + 2 = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z + 1 = 0$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (1, 1, 1)$

$$-2x + y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + 1 = 0 \\ x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(-1 - 2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow 5t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{5}$$

Luego, el punto de corte es el $M = \left(-1 + \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$. La distancia entre las rectas

viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = \left(\frac{1}{5} - 1, -\frac{3}{5} - 1, -1 - 1\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -2\right)$, luego:

$$d = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}} \quad u$$

La distancia entre las rectas es el lado del cuadrado, luego su área será: $S = d^2 = \frac{36}{5} \quad u^2$

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo

$$A(1,0,-1), B(3,2,1) \text{ y } C(-7,1,5)$$

a) Determina las coordenadas del punto D .

b) Calcula el área del paralelogramo.

c) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal AC es: $M = \left(\frac{1-7}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = \left(-3, \frac{1}{2}, 2 \right)$

El punto medio de la diagonal BD , también es M , luego si llamamos $D(a, b, c)$, se tiene que cumplir:

$$M = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = \left(-3, \frac{1}{2}, 2 \right) \Rightarrow D(-9, -1, 3)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (2, 2, 2)$ y $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$ y aplicamos la fórmula del área del paralelogramo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (10, -28, 18)$$

$$S = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}| = \sqrt{10^2 + 28^2 + 18^2} = \sqrt{1208} = 34,75 \text{ u}^2$$

c) El plano viene definido por el punto $A = (1, 0, -1)$ y los vectores $\vec{AB} = (2, 2, 2)$ y $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -10 \\ y & 2 & -1 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 14y + 9z + 4 = 0$$

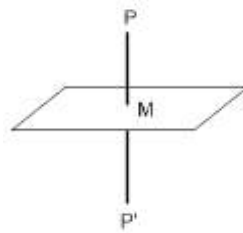
Se considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto P , es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2, -1, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2 \cdot (1 + 2t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (-1 + t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Luego, las coordenadas del punto M son: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que: $\frac{a+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$; $\frac{b+0}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$; $\frac{c-1}{2} = -\frac{4}{3} \Rightarrow c = -\frac{5}{3}$

Luego, el punto simétrico es el $P'\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

b) Calculamos el vector director de la recta
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (2, 1, 0)$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $P(1,0,-1)$, el vector $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 4z - 5 = 0$$

Sea r la recta dada por $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ y sea s la recta definida por $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) La recta r pasa por el punto $A=(1,-1,0)$ y su vector director es $\vec{u}=(-1,0,1)$. La recta s pasa por el punto $B=(2,2,2)$ y su vector director es $\vec{v}=(1,0,2)$. Las rectas se cruzan si el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}=(-1,0,1)$, $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{AB}=(1,3,2)$ es tres. Vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{El rango vale 3 y las rectas se cruzan.}$$

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+s \\ y=2 \\ z=2+2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A=(1-t,-1,t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B=(2+s,2,2+2s)$. El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(1+s+t,3,2+2s-t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -1-s-t+2+2s-t=0 \Rightarrow 1+s-2t=0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1+s+t+4+4s-2t=0 \Rightarrow 5+5s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=0$; $s=-1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(1,-1,0) ; B=(1,2,0)$$

La recta perpendicular viene definida por el punto $A=(1,-1,0)$ y el vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, luego:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, por lo tanto: $d = |\vec{AB}| = \sqrt{9} = 3$

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$.

Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de r .

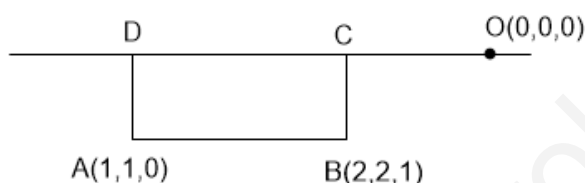
b) Calcula el área del triángulo ABC .

c) Determina las coordenadas del punto D .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)



La recta que pasa por C y D tiene el mismo vector director que la recta que pasa por A por B , luego, su ecuación

$$\text{es: } r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

b) Con el punto $B(2,2,1)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow x + y + z - 5 = 0$$

Las coordenadas del punto C son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow t + t + t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow C = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (1,1,1)$; $\vec{AC} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{ módulo } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{ módulo } (1, -1, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} u^2$$

c) Con el punto $A(1,1,0)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Las coordenadas del punto D , son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow t + t + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 1$.

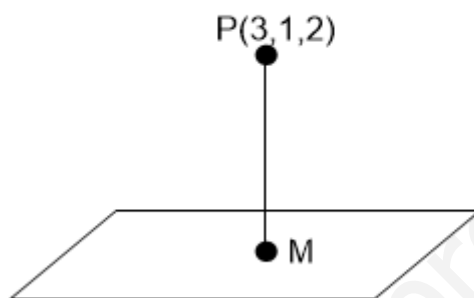
a) Halla el punto de π más próximo al punto $(3,1,2)$.

b) Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 2, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $1 \cdot (3 + t) + 2 \cdot (1 + 2t) + 1 \cdot (2 + t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $M = (3 + t, 1 + 2t, 2 + t) = (2, -1, 1)$

b) El plano paralelo tendrá de ecuación: $x + 2y + z = D$. Calculamos los puntos de corte con los ejes

coordenados: $A = (D, 0, 0)$; $B = \left(0, \frac{D}{2}, 0\right)$; $C = (0, 0, D)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = \left(-D, \frac{D}{2}, 0\right)$; $\vec{AC} = (-D, 0, D)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo: $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| =$

$$= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -D & \frac{D}{2} & 0 \\ -D & 0 & D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\frac{D^2}{2}, D^2, \frac{D^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D^4}{4} + D^4 + \frac{D^4}{4}} = \sqrt{6} \Rightarrow D = \pm 2$$

Luego, la ecuación del plano paralelo es: $x + 2y + z = 2$ ó $x + 2y + z = -2$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,-1,1)$ y s la recta dada por

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1,1,0) \\ \vec{u} = \vec{AB} = (2,-2,1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1,0,-1) \\ \vec{v} = (-2,1,-1) \end{cases}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $\vec{u} = (2,-2,1)$ y $\vec{v} = (-2,1,-1)$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -2 \\ y-0 & -2 & 1 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2z=0$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) El vector normal del plano es el vector director de s , luego: $-2x + y - z + D = 0$

y queremos que pase por el punto B :

$$-2 \cdot 3 - 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 8$$

$$\text{El plano que nos piden es: } -2x + y - z + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 8 - 2t + s \end{cases}$$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \quad y \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

Calculamos la ecuación general del plano π'

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+3+z+6+y=0 \Rightarrow x+y+z+9=0$$

Pasamos la recta r a paramétricas $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 3t \end{cases}$ y, por tanto, podemos tomar como punto

genérico de la recta $P = (1+2t, -1+t, 3t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π' , tenemos que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$, luego:

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \Rightarrow \frac{|1+2t-1+t+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+2t-1+t+3t+9|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3+6t|}{\sqrt{3}} = \frac{|9+6t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3+6t| = |9+6t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$3+6t = 9+6t \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$3+6t = -9-6t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow P = (-1, -2, -3)$$

Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π .

b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π ?

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta $\vec{u} = (-3, 2, -1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (6, -m, 2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{6}{-3} = \frac{-m}{2} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = 4$$

b) Pasamos la recta a implícitas

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = -3y-3 \\ -x+1 = -3z-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las tres ecuaciones:
$$\begin{cases} x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \\ 6x-my+2z = 1 \end{cases}$$

La recta está contenida en el plano si $Rango(A) = Rango(M) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & -m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 54 + 6 + 3m = 0 \Rightarrow m = -20 \Rightarrow \begin{cases} m = -20 \Rightarrow Rango A = 2 \\ m \neq -20 \Rightarrow Rango A = 3 \end{cases}$$

$$m = -20 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -7 \\ 6 & 20 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-6F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{2}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, no hay ningún valor de m para el cuál la recta esté contenida en el plano.

Considera el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} .$$

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r .

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A .

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por A . El vector director de la recta $(2, -1, 0)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x - y + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(1, -1, 1)$.

$$2x - y + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Luego, el plano es: $2x - y - 3 = 0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x - y - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1 + \frac{4}{5}, 1 - \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $A' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, -1, 1) + (a, b, c)}{2} = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) \Rightarrow A' = \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)$$

b) De la recta r sabemos que: $B(1, 1, 1)$ y $\vec{u} = (2, -1, 0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{AB} = (0, 2, 0)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4z - 4 = 0 \Rightarrow z - 1 = 0$$

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 + s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1 + s, 3 + s, -s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1 + s - t, 3 + s - t, -s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t - s - t = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t + s + t = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 1$; $s = -1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, 1) ; B = (0, 2, 1)$$

La distancia viene dada por el módulo del vector \vec{AB}

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2} u$$

Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} .$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

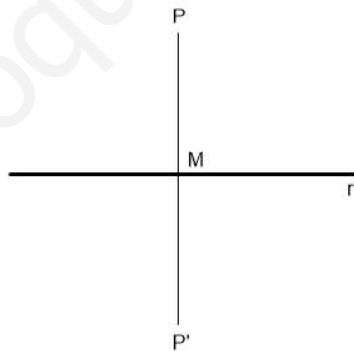
R E S O L U C I Ó N

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ sabemos un punto $A = (1, -2, 0)$ y su vector director $\vec{u} = (3, 0, 1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P = (1, -1, 0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ y $\vec{PA} = (0, -1, 0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 3z + 1 = 0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M = (1 + 3t, -2, t)$. Calculamos el vector $\vec{PM} = (1 + 3t - 1, -2 + 1, t - 0) = (3t, -1, t)$. Queremos que el vector \vec{PM} sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (3, 0, 1)$, luego: $\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (3t, -1, t) \cdot (3, 0, 1) = 0 \Rightarrow 9t + t = 0 \Rightarrow t = 0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M = (1, -2, 0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, -1, 0) + (a, b, c)}{2} = (1, -2, 0) \Rightarrow P' = (1, -3, 0)$$

Considera los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) Halla m y n sabiendo que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes y que \vec{w} es ortogonal a \vec{u} .

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tenga volumen 10 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n - 2m - 1 = 0$$

Si \vec{w} es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow m + n = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $m = \frac{1}{4}$; $n = -\frac{1}{4}$

b) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = 10 = \frac{1}{6} \text{ Valor absoluto de } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |1 - 2m| \Rightarrow |1 - 2m| = 60 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2m = 60 \Rightarrow m = -\frac{59}{2} \\ -1 + 2m = 60 \Rightarrow m = \frac{61}{2} \end{cases}$$

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$ siendo λ un número real.

a) Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tiene volumen 6 unidades cúbicas.

b) Determina el valor de λ para el que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El volumen del paralelepípedo viene dado por el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda - 6 \Rightarrow |-2\lambda - 6| = 6 \Rightarrow \lambda = 0 ; \lambda = -6$$

b) Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Sea r la recta que pasa por $A(4,3,6)$ y $B(-2,0,0)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula, si existen, los puntos C de s tales que los vectores \overrightarrow{CA} y \overrightarrow{CB} son ortogonales.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta r viene definida por $A(4,3,6)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (-6, -3, -6)$. La recta s viene definida por el punto $D(2,0,1)$ y el vector $\vec{u} = (1,1,-2)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{AD} = (-2, -3, -6)$.

Calculamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+6F_1 \\ F_3+2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -44 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Cualquier punto C de la recta s , tiene de componentes: $C(2+t, t, 1-2t)$. Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{CA} = (2-t, 3-t, 5+2t)$ y $\overrightarrow{CB} = (-4-t, -t, -1+2t)$. Si son ortogonales, su producto escalar vale cero:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (2-t, 3-t, 5+2t) \cdot (-4-t, -t, -1+2t) = 6t^2 + 7t - 13 = 0 \Rightarrow t = 1 ; t = -\frac{13}{6}$$

Luego, los puntos C son: $C_1(3,1,-1)$ y $C_2\left(-\frac{1}{6}, -\frac{13}{6}, \frac{16}{3}\right)$

Considera las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Halla la distancia entre las rectas r y s .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto genérico de cada recta y su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = 1 + s \end{cases} \Rightarrow A(s, 1 + s, 1 + s); \vec{u} = (1, 1, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow B(1 - t, t, 2); \vec{v} = (-1, 1, 0)$$

El vector \overline{AB} tiene de coordenadas: $\overline{AB} = (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s)$.

Como el vector \overline{AB} tiene que ser perpendicular a las rectas r y s , se debe cumplir:

$$\overline{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s) \cdot (1, 1, 1) = 1 - t - s + t - 1 - s + 1 - s = 1 - 3s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$\overline{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s) \cdot (-1, 1, 0) = -1 + t + s + t - 1 - s = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Con lo cual: $A(s, 1 + s, 1 + s) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$; $B(1 - t, t, 2) = (0, 1, 2)$;

$$\overline{AB} = (1 - t - s, t - 1 - s, 1 - s) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{y - \frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z - \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

b) La distancia es el módulo del vector $\overline{AB} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$d = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = 0'816 \text{ u}$$

Considera los puntos $A(1,3,-1)$ y $B(3,-1,-1)$.

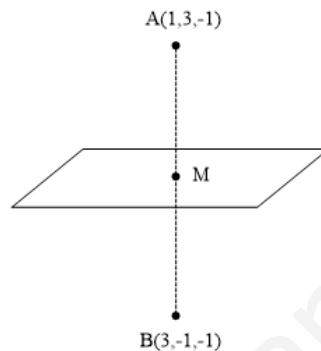
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual B es el simétrico de A .

b) Siendo $C(5,1,5)$, calcula el área del triángulo de vértices $A;B$ y C .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto M

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,3,-1) + (3,-1,-1)}{2} = (2,1,-1)$$

Calculamos el vector $\vec{AB} = (2,-4,0)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x - 4y + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto M , entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x - 4y + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow 2x - 4y = 0$$

b) Calculamos el área del triángulo ABC .

$$\vec{AB} = (2,-4,0); \vec{AC} = (4,-2,6).$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left[-24 \vec{i} - 12 \vec{j} + 12 \vec{k} \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-24)^2 + (-12)^2 + (12)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{864} = \sqrt{216} = 14'69 \text{ u}^2$$

Considera los puntos $A(-1, -2, -1)$ y $B(1, 0, 1)$.

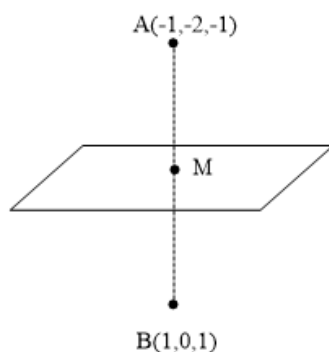
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) Calcula la distancia de $P(-1, 0, 1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto M

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(-1, -2, -1) + (1, 0, 1)}{2} = (0, -1, 0)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x + 2y + 2z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto M , entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \Rightarrow x + y + z + 1 = 0$$

b) La recta que pasa por A y B tiene de ecuación:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$
 Cualquier punto de esta recta tiene

de coordenadas: $C(-1 + 2t, -2 + 2t, -1 + 2t)$. Calculamos el vector

$$\overrightarrow{PC}(-1 + 2t + 1, -2 + 2t - 0, -1 + 2t - 1) = (2t, -2 + 2t, -2 + 2t)$$

Este vector tiene que ser perpendicular al vector director de la recta, luego:

$$\overrightarrow{PC} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2t, -2 + 2t, -2 + 2t) \cdot (2, 2, 2) = 0 \Rightarrow 4t - 4 + 4t - 4 + 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

La distancia del punto P a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PC} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, luego:

$$d = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1,63 \text{ u}$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D .

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-1, -3, 1)$; $\vec{AC} = (-2, -1, 1)$ y $\vec{AD} = (1, -2, -3)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |15| = \frac{15}{6} u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = (-2, -1, -5)$$

La recta que nos piden es: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-5}$

Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .

b) Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ .

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas:
$$\begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

La recta pasa por el punto $P = (-3, 0, -3)$ y su vector director es $\vec{u} = (2, 1, 1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1, 0, 0)$, el vector $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y el vector $\vec{AP} = (-4, 0, -3)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 4z - 3 = 0$$

b) Calculamos la ecuación del plano. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1, 0, 0)$ y los vectores $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{AC} = (0, -1, \lambda)$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano
$$\begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \\ \lambda x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = -\frac{1}{3}$	2	3	Recta paralela al plano.
$\lambda \neq -\frac{1}{3}$	3	3	Recta secante al plano.

Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u} = (1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y = 0$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por P , está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a \vec{u} .

b) Determina la ecuación del plano que pasa por P , es perpendicular a π y del que \vec{u} es un vector director.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por el punto $P(-1,0,1)$ y su vector director es $\vec{v} = (a,b,c)$.

Como la recta es perpendicular a $\vec{u} = (1,2,1)$, el producto escalar de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0$.

Además la recta está contenida en el plano $y = 0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n} = (0,1,0)$ y el vector $\vec{v} = (a,b,c)$, también es cero, luego: $b = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = (-c, 0, c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a c el valor 1, la recta será:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$$

b) El plano que nos piden viene definido por el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u} = (1,2,1)$ y el vector normal del plano π , $\vec{n} = (0,1,0)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + z - 2 = 0$$

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

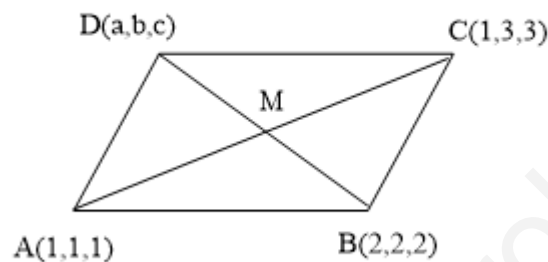
a) Calcula el área del paralelogramo.

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) Calcula las coordenadas del vértice D .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (1,1,1)$ y $\vec{AC} = (0,2,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, 2)$$

$$\text{Área} = \text{módulo} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} u^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (1,1,1)$ y $\vec{AC} = (0,2,2)$ y la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - z = 0$$

c) Calculamos las coordenadas del punto medio M

$$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow M = \frac{(1,1,1) + (1,3,3)}{2} = (1,2,2)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (1,2,2) = \frac{(2,2,2) + (a,b,c)}{2} \Rightarrow D = (0,2,2)$$

Considera el punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

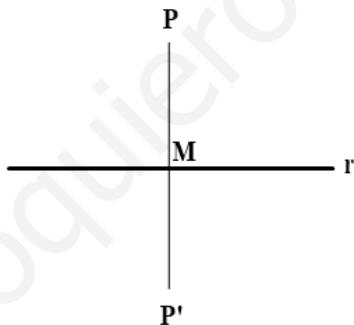
a) La ecuación del haz de planos es: $x-2y+5+k(z-2)=0$.

Como queremos el plano que pasa por $P(0,1,1)$, tenemos que:

$$0-2\cdot 1+5+k(1-2)=0 \Rightarrow k=3$$

luego, el plano es: $x-2y+5+3(z-2)=0 \Rightarrow x-2y+3z-1=0$

b)



Pasamos la recta r a paramétricas: $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$, con lo cual:

$$M = (-5+2t, t, 2); \vec{u} = (2, 1, 0)$$

Para calcular el simétrico del punto $P = (0, 1, 1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PM} = (-5+2t, t-1, 1)$

y el vector $\vec{u} = (2, 1, 0)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-5+2t, t-1, 1) \cdot (2, 1, 0) = 0 \Rightarrow -10+4t+t-1=0 \Rightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow M = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P+P'}{2} = M \Rightarrow \left(\frac{0+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) \Rightarrow P' = \left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$$

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

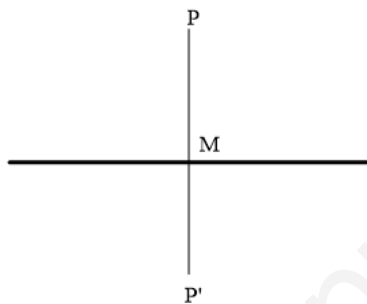
a) Determina el punto simétrico de P respecto de r .

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Pasamos la recta a paramétricas: $x-5 = y = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+t \\ y = t \\ z = -2-2t \end{cases}$.

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $M(5+t, t, -2-2t)$. Queremos que el vector $\overrightarrow{PM} = (5+t-1, t-0, -2-2t+1) = (4+t, t, -1-2t)$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (1, 1, -2)$, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (4+t, t, -1-2t) \cdot (1, 1, -2) = 0 \Rightarrow -6-6t = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto M es: $M = (4, -1, 0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, 0, -1) + (a, b, c)}{2} = (4, -1, 0) \Rightarrow P' = (7, -2, 1)$$

b) Cualquier punto A de la recta tiene de coordenadas: $A(5+t, t, -2-2t)$. Buscamos el que equidista de P y Q , por lo tanto, el módulo del vector $\overrightarrow{PA} = (4+t, t, -1-2t)$ tiene que ser igual al módulo del vector $\overrightarrow{QA} = (3+t, t-1, -3-2t)$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| &= |\overrightarrow{QA}| \Rightarrow \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + (t-1)^2 + (-3-2t)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t = 9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6t^2+12t+17 = 6t^2+16t+19 \Rightarrow -4t = 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, el punto A de la recta que equidista de P y Q es: $A = \left(5 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

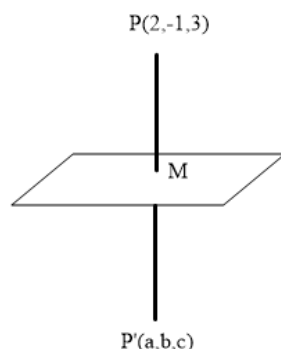
a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π .

b) Calcula la distancia de P a π .

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n} = (3, 2, 1)$ y el punto P , calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$3 \cdot (2 + 3t) + 2 \cdot (-1 + 2t) + (3 + t) = 5 \Rightarrow 14t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{7}$$

Luego, el punto M es: $M = \left(2 - \frac{3}{7}, -1 - \frac{2}{7}, 3 - \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = \frac{(2, -1, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{7} = a + 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \\ -\frac{18}{7} = b - 1 \Rightarrow b = -\frac{11}{7} \\ \frac{40}{7} = c + 3 \Rightarrow c = \frac{19}{7} \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P' \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = \left(\frac{11}{7} - 2, -\frac{9}{7} + 1, \frac{20}{7} - 3\right) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

$$d(P, \pi) = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{7} = 0'534 \text{ u}$$

Se considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 6$.

- Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
- Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto de π .
- Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Con el vector normal del plano $\vec{n} = (1, 2, 1)$ y el punto $O = (0, 0, 0)$, calculamos la recta que pasa por O y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot (t) + 2 \cdot (2t) + 1 \cdot (t) = 6 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto M es: $M = (1, 2, 1)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{O + O'}{2} \Rightarrow (1, 2, 1) = \frac{(0, 0, 0) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $O'(2, 4, 2)$.

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

Corte con el eje OX $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

Corte con el eje OY $\Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3, 0)$

Corte con el eje OZ $\Rightarrow z = 6 \Rightarrow C(0, 0, 6)$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores,

$\vec{OA} = (6, 0, 0)$; $\vec{OB} = (0, 3, 0)$; $\vec{OC} = (0, 0, 6)$, es decir:

$$V = \frac{1}{6} \text{ Valor absoluto de } \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{108}{6} = 18 u^3$$

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv x - 2 = y - 2 = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$$

- a) Determina m para que r y s sean paralelas.
b) Halla, si existe, un valor de m para el que ambas rectas sean la misma.
c) Para $m = 1$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s
- MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv x - 2 = y - 2 = z \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (2, 2, 0) ; \vec{u} = (1, 1, 1)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases} \Rightarrow B = (4, 4, 0) ; \vec{v} = (1, 1, m)$$

Si las rectas son paralelas, los vectores tienen que ser linealmente dependientes, es decir, sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$$

b) Vemos que el punto $B = (4, 4, 0)$ de la recta s , no verifica la ecuación de la recta r

$$4 - 2 = 4 - 2 \neq 0$$

Por lo tanto, no hay ningún valor de m para el cual las rectas sean coincidentes.

c) El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (2, 2, 0)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AB} = (2, 2, 0)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - y + 4 = 0$$

Considera las rectas r y s dadas por: $r \equiv \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la recta perpendicular común a r y a s .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ y calculamos el

rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el $\text{rango}(A) = 3$ y el $\text{rango}(M) = 4$, las dos rectas se cruzan.

b) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1 + 2t, 3 - t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2, -3, s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1 - 2t, -6 + t, s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (1 - 2t, -6 + t, s - t) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Rightarrow 8 - 6t + s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1 - 2t, -6 + t, s - t) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow s - t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = \frac{8}{5}$; $s = \frac{8}{5}$

La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$ y $\vec{AB} = \left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x - \frac{21}{5}}{-\frac{11}{5}} = \frac{y - \frac{7}{5}}{-\frac{22}{5}} = \frac{z - \frac{8}{5}}{0}$$

Considera los puntos $A(2, -1, -2)$ y $B(-1, -1, 2)$, y la recta r dada por $x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2}$

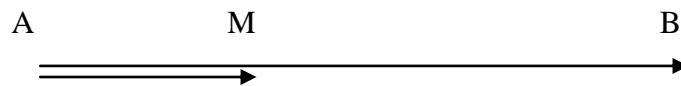
a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.

b) Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 4)$ y $\overrightarrow{AM} = (x - 2, y + 1, z + 2)$, obtenemos: $(-3, 0, 4) = (3x - 6, 3y + 3, 3z + 6) \Rightarrow x = 1; y = -1; z = -\frac{2}{3}$, es

decir el punto M es $M = \left(1, -1, -\frac{2}{3}\right)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir:

$$N = \frac{M + B}{2} = \left(\frac{1 - 1}{2}, \frac{-1 - 1}{2}, \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} \right) = \left(0, -1, \frac{2}{3} \right)$$

b) Escribimos la recta r en forma paramétrica $r \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Cualquier punto C de la recta r tiene de coordenadas $C = (1 + t, 1 - t, 1 + 2t)$. Calculamos los vectores \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{CA} .

$$\overrightarrow{CB} = (-2 - t, -2 + t, 1 - 2t) \text{ y } \overrightarrow{CA} = (1 - t, -2 + t, -3 - 2t)$$

El producto escalar debe valer cero ya que son perpendiculares, luego:

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow (-2 - t, -2 + t, 1 - 2t) \cdot (1 - t, -2 + t, -3 - 2t) = 6t^2 + t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}; t = -\frac{1}{2}$$

Luego el punto C puede ser:

$$\text{Si } t = \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = \left(1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Si } t = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 - 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

Se sabe que los puntos $A(-1,2,6)$ y $B(1,4,-2)$ son simétricos respecto de un plano π .

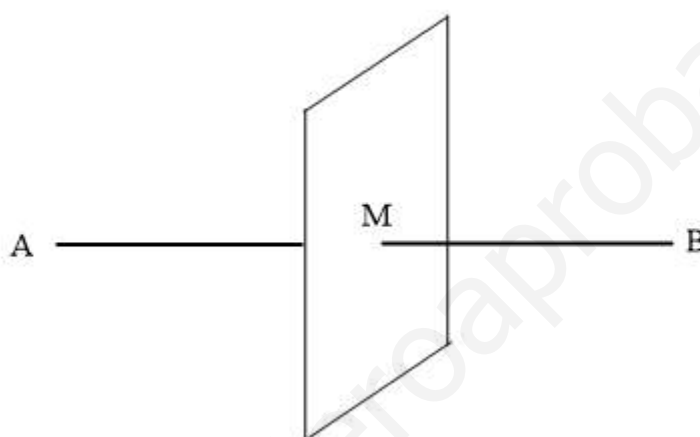
a) Calcula la distancia de A a π .

b) Determina la ecuación general del plano π .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

b) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio M .



El vector $\vec{AB} = (2, 2, -8)$ es el vector normal del plano, luego:

$$2x + 2y - 8z + D = 0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M = (0, 3, 2)$, tenemos que el plano pedido es:

$$2x + 2y - 8z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 8 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 10 \Rightarrow 2x + 2y - 8z + 10 = 0 \Rightarrow x + y - 4z + 5 = 0$$

a) La distancia de A a π es el módulo del vector $\vec{AM} = (1, 1, -4)$, luego:

$$d(A, \pi) = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} \text{ u}$$

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre las rectas dadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - s \\ y = s \\ z = 2 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (2t, 1, 0)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2 - s, s, 2)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (2 - s - 2t, s - 1, 2)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2 - s - 2t, s - 1, 2) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow 2 - s - 2t = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2 - s - 2t, s - 1, 2) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow -2 + s + 2t + s - 1 = 0 \Rightarrow 2s + 2t - 3 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $t = \frac{1}{2}$; $s = 1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, 0) ; B = (1, 1, 2)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (1, 1, 0)$ y $\vec{AB} = (0, 0, 2)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = (0, 0, 2)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 2^2} = 2 \text{ u}$$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(3,6,7)$ y $B(7,8,3)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

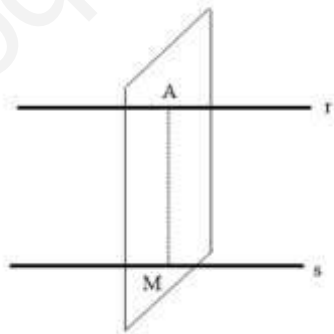
a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r . $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-7}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-9 \\ x+z=10 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x-2y=-9 \\ x+z=10 \\ x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$ y calculamos el

rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el $\text{rango}(A) = 2$ y el $\text{rango}(M) = 3$, las dos rectas son paralelas.

b) Calculamos un plano perpendicular a r y que pasa por A

$$4x+2y-4z+D=0 \Rightarrow 4 \cdot 3+2 \cdot 6-4 \cdot 7+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow 4x+2y-4z+4=0 \Rightarrow 2x+y-2z+2=0$$



Calculamos el punto M , punto de corte de la recta s con el plano.

$$\begin{cases} x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \\ 2x+y-2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -10 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & 28 \\ 0 & 9 & 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow x=1; y=2; z=3$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM} = (-2, -4, -4)$

$$d(r,s) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 6 \text{ u}$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(0,1,0)$ y es perpendicular a la recta r dada por $x+1 = \frac{y+2}{2} = z-1$

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano de ecuación $2x+3y+4z=12$ con los ejes coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta, luego todos los planos perpendiculares a la recta tendrán de ecuación: $x+2y+z+D=0$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto A , luego:

$$x+2y+z+D=0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow x+2y+z-2=0$$

b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(6,0,0)$; $B=(0,4,0)$;

$C=(0,0,3)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-6,4,0)$ y $\vec{AC}=(-6,0,3)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 18\vec{j} + 24\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 18^2 + 24^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1044} = \sqrt{261} = 16,15 \text{ u}^2$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y = -5 \\ y-2z = -1 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = -1 \\ 3x-2z = -1 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x-2y = -1 \\ 3x-2z = -1 \\ 2x-3y = -5 \\ y-2z = -1 \end{cases}$ y calculamos el rango de

la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-6F_3 \\ F_4-F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-6F_3 \\ F_4-F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 4$$

Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (-1, 0, -1) \\ \vec{u} = (2, 1, 3) \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-4, -1, 0) \\ \vec{v} = (3, 2, 1) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula: $d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{\sqrt{75}} = 1'039u$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases}$

a) Halla los valores de m y n para los que r y s se corten perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + mt \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1, -1, 0) ; \vec{u} = (2, m, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - ns \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -3, 0) ; \vec{v} = (-n, 1, 1)$$

Los vectores \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares, luego: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2n + m + 1 = 0$

Las dos rectas se tienen que cortar en un punto, luego: $Rango(\vec{u}, \vec{v}) = Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}) = 2$, por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 3 + 4 = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{cases} -2n + m + 1 = 0 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 4 ; n = \frac{5}{2}$$

b) Estudiamos la posición de las rectas cuando $m = 3$ y $n = 1$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1, -1, 0) ; \vec{u} = (2, 3, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - s \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -3, 0) ; \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Calculamos el $Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB})$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 3 + 4 = 0 \Rightarrow Rango = 2 \Rightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

Luego, el plano viene determinado por el punto A y los vectores \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$