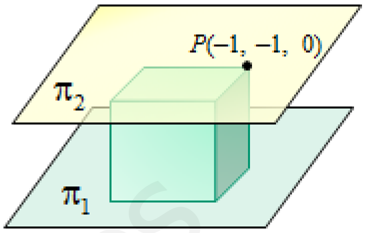
Ejercicio 3: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1,5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos *ABCD*, con *A*(2, 1, 3) y *B*(1, 2, 3), calcular los vértices *C* y *D*, sabiendo que *C* pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

Solución:



Como los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$ y $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$ son paralelos, la medida de la arista del cubo viene dada por la distancia entre ambos planos.

La distancia de entre esos planos es:

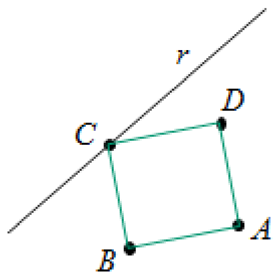
$$d(\pi_1,\pi_2)=d\left(P(-1,-1,0)\in\pi_2,\pi_1\equiv 4x+6y-12z+1=0\right)=\left|\frac{-4-6+1}{\sqrt{4^2+6^2+(-12)^2}}\right|=\frac{9}{14}.$$

Por tanto, el volumen del cubo será:

$$V=\left(\frac{9}{14}\right)^3=\frac{729}{2744}\ \text{u}^3.$$

b) Cuadrado de vértices consecutivos *ABCD*, con *A*(2, 1, 3) y *B*(1, 2, 3), y *C* pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

El punto *C* estará en la recta determinada por π_2 y π_3.



$$\begin{cases}\pi_2\equiv -2x-3y+6z-5=0\\ \pi_3\equiv x-y+z=2\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}-2x-3y=5-6z\\ x-y=2-z\end{cases}\Rightarrow$$

$$r:\begin{cases}x=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}t\\ y=-\dfrac{9}{5}+\dfrac{8}{5}t\\ z=t\end{cases}\rightarrow C\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}t,\ \ -\frac{9}{5}+\frac{8}{5}t,\ \ t\right).$$

Si *ABCD* es un cuadrado $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

$$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)-(2,1,3)=(-1,1,0);$$

$$\overrightarrow{CB}=(1,2,3)-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}t,\ \ -\frac{9}{5}+\frac{8}{5}t,\ \ t\right)=\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}t,\ \ \frac{19}{5}-\frac{8}{5}t,\ \ 3-t\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow(-1,1,0)\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}t,\ \ \frac{19}{5}-\frac{8}{5}t,\ \ 3-t\right)=0\Rightarrow-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}t+\frac{19}{5}-\frac{8}{5}t=0\Rightarrow t=3.$$

Por tanto: *C*(2, 3, 3).

Si *D*(*a*, *b*, *c*), como $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow(2-a,3-b,3-c)=(-1,1,0)\Rightarrow a=3;\ b=2,\ c=3.$

Luego, *D*(3, 2, 3).

Ejercicio 3: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

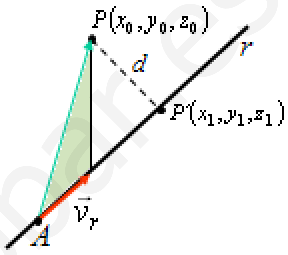
a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución:

a) Se escribe la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$ en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=6-5t \end{cases}$.

La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}, \text{ siendo } A \in r.$$



En este caso:

$A = (0, 2, 6)$, $P = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -5)$, $\vec{v}_r = (1, -2, -5)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-5,\ 0,\ -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{1+(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{30}$.

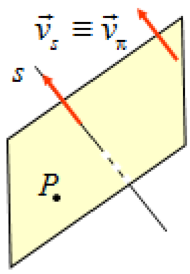
Luego $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{13}{15}}$.

b) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{AB}$, siendo $A \in r$ y $B \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

$\vec{v}_r = (1, -2, -5)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$ y $\boldsymbol{AB} = (2, -1, -1) - (0, 2, 6) = (2, -3, -7)$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1/3 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -7+1+2\left(2-\dfrac{2}{3}\right)-5 = \dfrac{5}{3} \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

c) El plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P tiene como vector normal a $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$.



Por tanto, su ecuación será: $\pi \equiv -x+y+\dfrac{1}{3}z+d=0$.

Como se desea que pase por $P(1, 1, 1) \Rightarrow -1+1+\dfrac{1}{3}+d=0 \Rightarrow d=-\dfrac{1}{3}$.

El plano pedido será: $\pi \equiv -x+y+\dfrac{1}{3}z-\dfrac{1}{3}=0$.