

Continuidad y Derivabilidad

Problema 214 1. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2 - 7} - 3)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} = \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2 - 7})^2 - 3^2}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} &= \frac{8}{\sqrt{9} + 3} \implies \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & \text{si } x < 1 \\ kx^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R , salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$$2 - k^2 = k \implies k^2 + k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$$

Problema 215 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & \text{si } x < 1 \\ kx^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R , salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$$2 - k^2 = k \implies k^2 + k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 216 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \end{cases} \implies b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{cases} \implies a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo \mathbb{R} .

Problema 217 Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & \text{si } x < 1 \\ kx^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo \mathbb{R} , salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos: $2 - k^2 = k \implies k^2 + k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$

Problema 218 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \implies$$
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \implies$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 219 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \end{cases} \implies b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{cases} \implies a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R .

Problema 220 Calcular

1. Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \rightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -a + b \end{cases} \implies -a + b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = -1.$$

- En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 9 \end{cases} \implies 2a + b = 9 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 5$ en todo R .

Problema 221 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3ax^2}{2} - bx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcular los parámetros a y b , de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3ax^2}{2} - bx + 1 = 6a - 2b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} ax^3 + bx^2 = 8a + 4b \end{aligned} \right\} \implies$$

$$6a - 2b + 1 = 8a + 4b \implies 2a + 6b - 1 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax - b & \text{si } x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$6a - b = 12a + 4b \implies 6a + 5b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 6b - 1 = 0 \\ 6a + 5b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{5}{26} \\ b = \frac{3}{13} \end{cases}$$

Problema 222 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcular los parámetros a y b , de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 = \frac{4a + 4b + 1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} ax^3 + bx^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\frac{4a + 4b + 1}{2} = 8a + 4b - 1 \implies 12a + 4b - 3 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$2a + b = 12a + 4b \implies 10a + 3b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 12a + 4b - 3 = 0 \\ 10a + 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{9}{4} \\ b = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Problema 223 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^3 - 3x + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax^2 - bx - 1) = a - 3 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^3 - 3x + b) = 2a - b - 1$$

$$\text{Luego } -a + 2b - 2 = 0$$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si } x < 1 \\ 3ax^2 - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b, \quad f'(1^+) = 3a - 3 \implies a - b + 3 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} -a + 2b - 2 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$